Martins, Raquel Conceição Maia, 1978-

As espirais

http://hdl.handle.net/11067/489

Metadados

Data de Publicação 2013-10-11

Resumo Esta tese consiste no estudo de um certo tipo de curvas planas, mais precisamente nas espirais, baseado no Tratado das curvas Especiais Notáveis de Francisco Gomes Teixeira. O trabalho está dividido em duas partes. Na primeira parte será feita uma síntese de conceitos e resultados de cálculo diferencial e integral que são necessários para estudar estas curvas planas e que vão ser utilizados nos capítulos seguintes. Parte-se do princípio que os conceitos básicos de cálculo infinitesimal, nomeada...

Palavras Chave Espirais

Tipo masterThesis

Revisão de Pares Não

Coleções [ULL-FCEE] Dissertações

UNIVERSIDADE LUSÍADA DE LISBOA

Faculdade de Ciências da Economia e da Empresa

Mestrado em Matemática

As espirais

Realizado por:
Raquel da Conceição Maia Martins
Orientado por:
Prof.ª Doutora Margarida Moreira Barros

Constituição do Júri:

Presidente:	Prof. Doutor Eng. Diamantino Freitas Gomes Durão
Orientadora:	Prof.ª Doutora Margarida Moreira Barros
Arguente:	Prof. Doutor António Manuel Reis de Bivar Weinholtz

Dissertação aprovada em: 21 de Junho de 2012

Lisboa

2010

Universidade Lusíada de Lisboa

As Espirais

Raquel da Conceição Maia Martins

Dissertação para obtenção do grau de Mestre

Professor Orientador: Doutora Margarida Barros

Lisboa 2010

Agradecimentos

As minhas primeiras palavras de agradecimento têm de ir, forçosamente, para os meus pais. Com o amor, carinho e todo o apoio que sempre me demonstraram foi possível, não só este trabalho, mas toda a minha formação. Para com os meus pais, tenho uma dívida de gratidão eterna.

Ao Paulo, meu marido, pela paciência, estímulo e apoio incondicional desde a primeira hora, sem os quais não teria sido possível chegar ao fim.

Ao Vasco, por ser um filho adorável, espero que o empenho que ponho neste trabalho lhe possa servir de estímulo para vir a ser um bom aluno.

Finalmente, um agradecimento muito especial à minha orientadora, Professora Doutora Margarida Barros, pela competência científica, apoio bibliográfico, bem como pela disponibilidade de tempo que generosamente me dedicou ao longo destes meses.

Ìndice

Resumo

Esta tese consiste no estudo de um certo tipo de curvas planas, mais precisamente nas espirais, baseado no Tratado das curvas Especiais Notáveis de Francisco Gomes Teixeira.

O trabalho está dividido em duas partes. Na primeira parte será feita uma síntese de conceitos e resultados de cálculo diferencial e integral que são necessários para estudar estas curvas planas e que vão ser utilizados nos capítulos seguintes. Parte-se do princípio que os conceitos básicos de cálculo infinitesímal, nomeadamente, derivação, coordenadas polares e integração, são conhecidos, assim como as noções básicas de Geometria Diferencial de curvas.

As curvas são estudadas na segunda parte. Esta é composta por onze capítulos, cada um dedicado ao estudo de uma espiral específica.

Por diversas vezes os cálculos efectuados não são concordantes com os encontrados na obra referida. Sempre que tal acontece indica-se em nota de rodapé o resultado obtido por Gomes Teixeira.

Para a construção de figuras foram usados os softwares: GSP , Winplot e o Mathematica.

Abstrat

This thesis is to study a certain type of plane curves, more precisely on the spirals, based on the Treaty of curves Special Noteworthy Francisco Gomes Teixeira.

This essay is divided into two main parts. The first part will be a synthesis of concepts and results of calculation and integral differential that are needed to study these smooth curves and that will be used in later chapters. It starts from the principle that the basic concepts of calculus, namely derivation, integration and coordination polar as known as well as the basics of differential geometry of curves.

The curves are studied in the second part. This consists of eleven chapters, each devoted to the study of a special spiral.

Several times the calculations are not consistent with those found in the work cited. When this happens it is stated in a footnote the result obtained by Gomes Teixeira.

For the construction of the figures were used software: GSP, Winplot and Mathematica.

I PARTE- Conceitos e resultados gerais sobre curvas

1. Definição de Curva

Vamos começar por introduzir uma definição de curva plana. O conceito de curva é muito variável e aquele que vai ser apresentado não é certamente o mais comum e simples. Tem, no entanto, a vantagem de ser bastante abrangente e incluir todas as espirais estudadas nesta tese.

Um arco plano é uma função diferenciável (C^∞ ou pelo menos C^2)

$$\begin{aligned} I &\xrightarrow{\alpha} \Re^2 \\ t &\mapsto \left(f(t), g(t)\right) \end{aligned}$$, onde I é um intervalo de $\Re$,

tal que:

1. Se s e t são pontos interiores de I, $\left(f(t), g(t)\right) = \left(f(s), g(s)\right)$, se e só se $t = s$;
2. Se s é interior $f'(s)$ e $g'(s)$ não são simultaneamente nulas.

O traço do arco α é $\alpha(I)$.

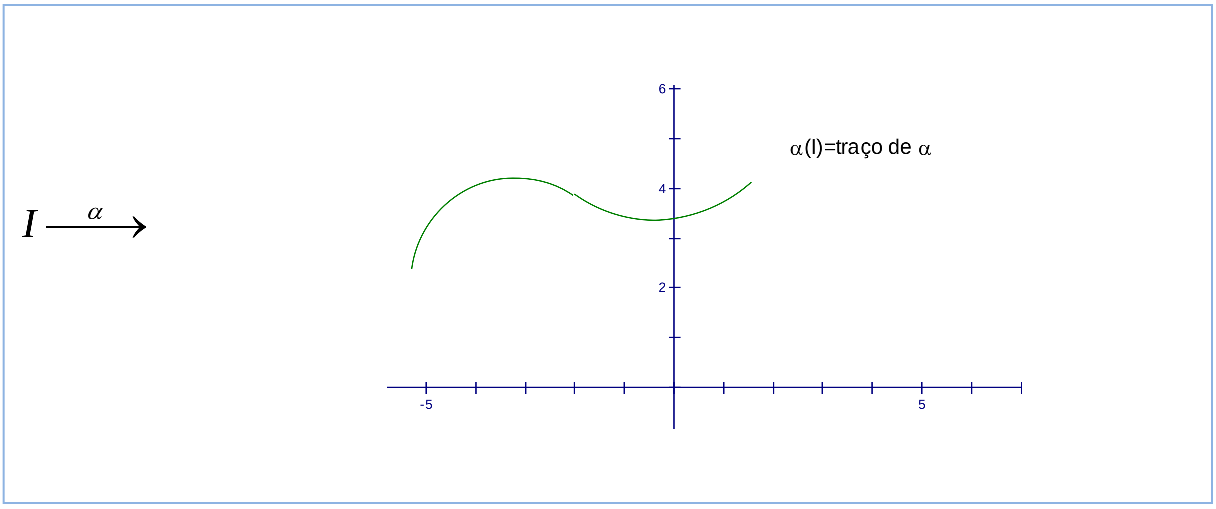

Figura 1

Se $I = [a,b]$, o arco tem como ponto inicial $\alpha(a)$ e ponto final $\alpha(b)$.

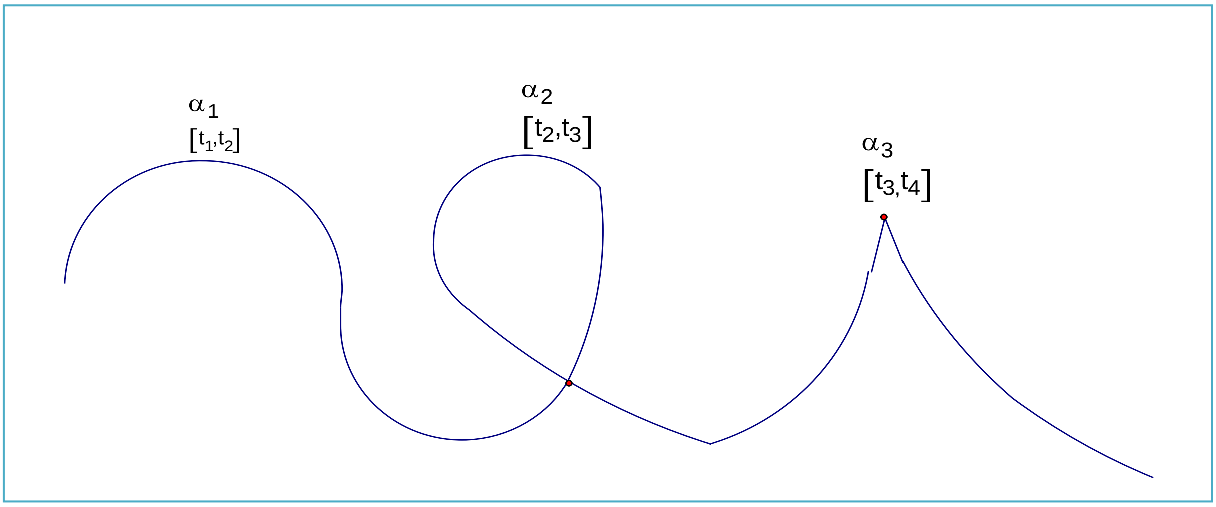

Figura 2

Note-se que a condição 1. excluí auto interseções do traço.

Uma curva parametrizada é composta por vários arcos, sendo o ponto inicial de um arco coincidente com o ponto final de outro. Mais precisamente, uma curva é o gráfico de uma função

$$\alpha : I \to \Re^2$$
$$t \mapsto \left(f(t), g(t) \right)$$

tal que o intervalo I admite uma divisão num número finito ou numerável de subintervalos de limites $\ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots$ tal que a restrição a cada subintervalo $[t_r, t_{r+1}]$ é um arco.

É comum definir curvas como o gráfico de uma equação $f(x,y)=0$ ou $g(\theta,\rho)=0$, conforme as coordenadas são cartesianas ou polares. Ora o gráfico destas equações (onde f e g são C^2) é, em geral, uma curva parametrizável. De facto, se num ponto (x_0, y_o) as derivadas parciais não são simultaneamente nulas, o teorema da função implícita garante a existência de uma função $\phi(x)$ ou $\varphi(y)$ tal que $f(x,\phi(x))=0$ ou $f(\varphi(y),y)=0$, conforme $f_y \neq 0$ ou $f_x \neq 0$. Uma parametrização local é $\alpha(x)=(x,\phi(x))$ ou $\alpha(y)=(\varphi(y),y)$.

2. Coordenadas polares

2.1 Ângulo entre o raio vector e a tangente

Seja, em coordenadas polares, $\rho = f(\theta)$ a equação de uma curva e $P = (\rho, \theta)$ um ponto da mesma.

Teorema: Se v é o ângulo compreendido entre o raio vector OP e a tangente em P, então

$$tg\, v = \frac{\rho}{\rho'}, \text{ onde } \rho' = \frac{d\rho}{d\theta}.$$

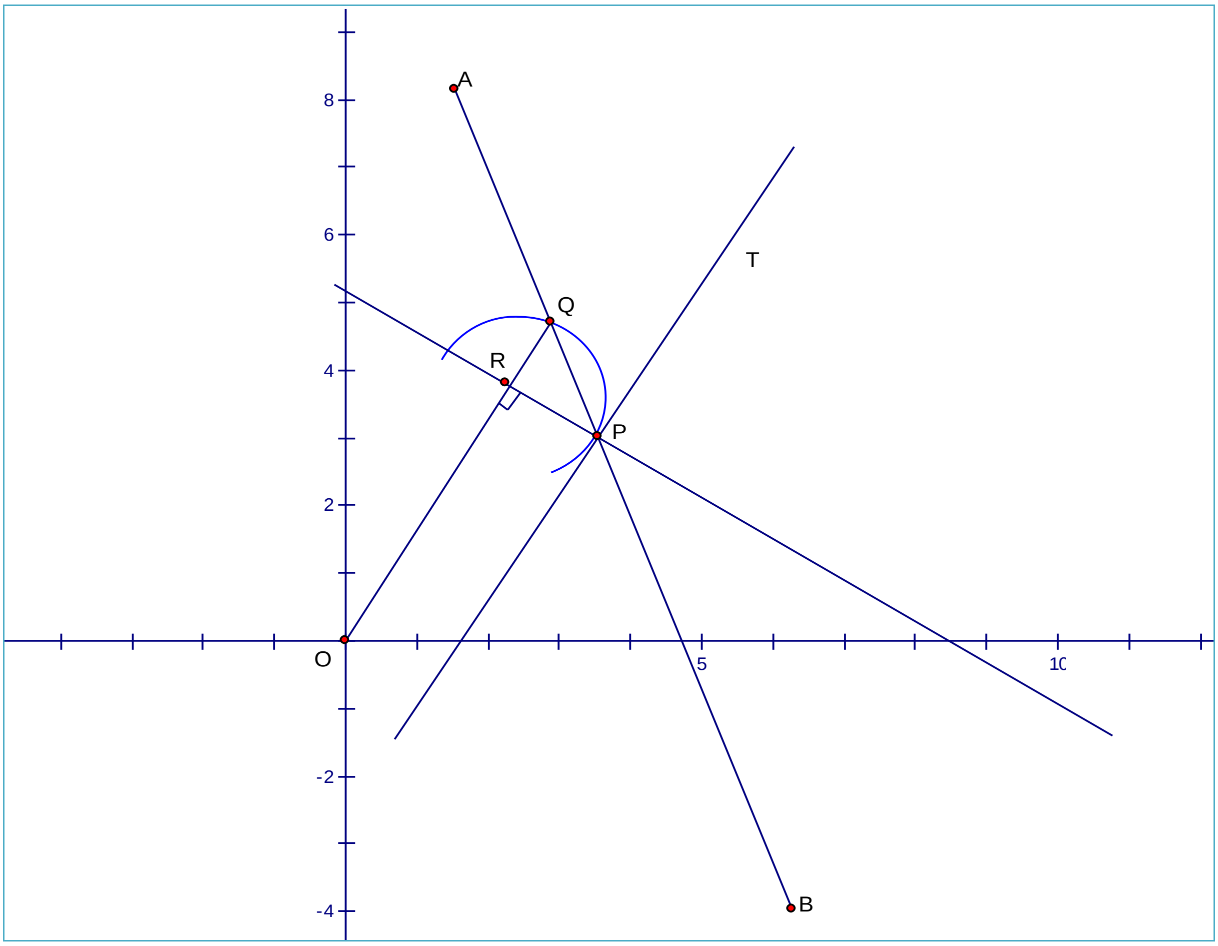

Figura 3

Demonstração:

Por P e um ponto $Q\left(\rho+\Delta\rho,\ \theta+\Delta\theta\right)$ da curva, próximo de P, tracemos a recta AB. Tracemos também a perpendicular PR a OQ, sendo R o ponto de intersecção das duas rectas.

Observando a figura, podemos inferir as igualdades seguintes:

- $OQ=\rho+\Delta\rho$,
- ângulo $POQ=\Delta\theta$,
- $PR=\rho sen\Delta\theta$,
- $OR=\rho\cos\Delta\theta$,
- $tg\ PQR=\dfrac{PR}{RQ}=\dfrac{PR}{OQ-OR}=\dfrac{\rho sen\Delta\theta}{\rho+\Delta\rho-\rho\cos\Delta\theta}$.

Fazendo $\Delta\theta$ tender para zero, o ponto Q tende para P, a secante AB gira em torno de P e tende para a tangente PT e o ângulo PQR tende para v.

Logo

$$tg\,v=\lim_{\Delta\theta\to o}\frac{\rho sen\Delta\theta}{\rho+\Delta\rho-\rho\cos\Delta\theta}=\lim_{\Delta\theta\to o}\frac{\rho sen\Delta\theta}{\rho\left(1-\cos\Delta\theta\right)+\Delta\rho}=\lim_{\Delta\theta\to o}\frac{\rho sen\Delta\theta}{2\rho sen^2\dfrac{\Delta\theta}{2}+\Delta\rho}.$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\Delta\theta$, obtêm-se:

$$tg\,v=\lim_{\Delta\theta\to o}\frac{\rho.\dfrac{sen\Delta\theta}{\Delta\theta}}{\rho sen\dfrac{\Delta\theta}{2}.\dfrac{sen\dfrac{\Delta\theta}{2}}{\dfrac{\Delta\theta}{2}}+\dfrac{\Delta\rho}{\Delta\theta}},$$ e como $\displaystyle\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{sen\Delta\theta}{\Delta\theta}=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{sen\dfrac{\Delta\theta}{2}}{\dfrac{\Delta\theta}{2}}=1$, bem resulta que

$$tg\,v=\frac{\rho\times 1}{\rho\times 0\times 1+\rho'}=\frac{\rho}{\rho'}.\ \blacksquare$$

No texto que se segue usaremos a notação AB para designar uma recta AB, o segmento de extremos A e B ou o comprimento do mesmo, sendo claro no contexto.

2.2 Comprimentos da tangente, da normal, subtangente e da subnormal polar

Por um ponto P da curva, tracemos a tangente e a normal. Considere-se a recta que passa na origem e é perpendicular ao raio vector do ponto P. Seja T e N respectivamente as intersecções desta última com a tangente e a normal.

Diz-se que comprimento da tangente polar é TP, o comprimento da normal polar é PN, OT comprimento da subtangente polar e ON comprimento da subnormal polar, da curva em P.

No triângulo OPT, $tgv = \dfrac{OT}{\rho}$, logo $OT = \rho tgv = \rho \dfrac{\rho d\theta}{d\rho}$ conclui-se que comprimento da subtangente polar St é

$$St = \rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}.$$

No triângulo OPN, $tg\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right) = \dfrac{ON}{\rho} \Leftrightarrow \dfrac{sen\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right)} = \dfrac{ON}{\rho} \Leftrightarrow \dfrac{\cos v}{senv} = \dfrac{ON}{\rho}$

$tgv = \dfrac{\rho}{ON} \Leftrightarrow tgv = \dfrac{ON}{\rho}$ concluí-se que comprimento da subnormal polar Sn é

$$Sn = \frac{d\rho}{d\theta}.$$

De notar que, quando o comprimento da subtangente ou da subnormal num ponto é conhecido, a tangente e a normal podem ser construídas facilmente, pois cada uma delas é a hipotenusa de um triângulo rectângulo.

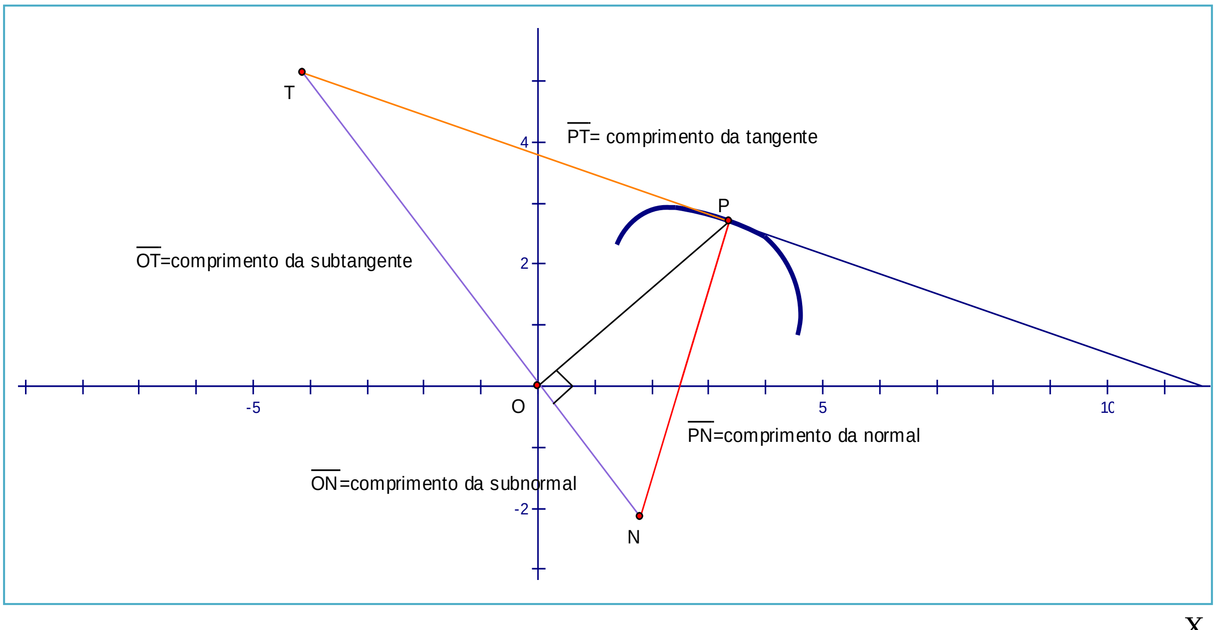

Figura 4

2.3 Área entre uma curva e dois raios vectores

Seja $\rho = f(\theta)$ a equação de uma curva, OP_1 e OP_n dois raios vectores e α e β os ângulos que os raios vectores formam com o eixo polar.

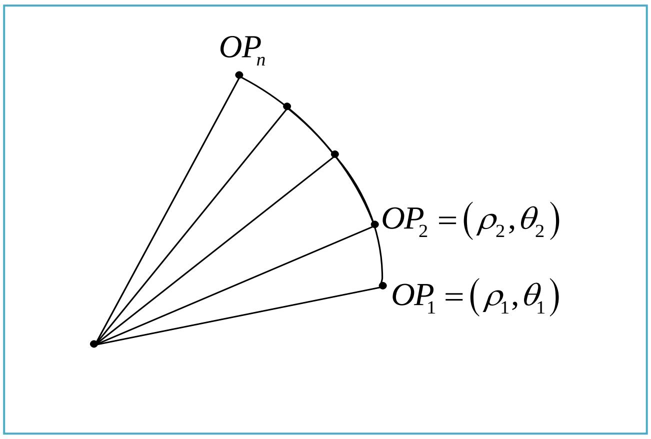

Figura 5

Para calcular a área limitada pela curva e os dois raios vectores considera-se essa área como o limite da soma de sectores circulares como os da figura e se $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \ldots,$ são os ângulos cêntricos dos sucessivos vectores e $\rho_1, \rho_2, \ldots$, os raios, a soma das áreas dos sectores é

$$\frac{1}{2}\rho_1^2 \Delta\theta_1 + \frac{1}{2}\rho_2^2 \Delta\theta_2 + \ldots + \frac{1}{2}\rho_n^2 \Delta\theta_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\rho_i^2 \Delta\theta_i \,,$$

pois a área de um sector circular é igual ao produto da metade do raio pelo arco e o arco é o produto do raio pelo ângulo do sector.

Aplicando o teorema fundamental do cálculo vem,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\rho_i^2 \Delta\theta_i = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\rho^2 \, d\theta \,.$$

Portanto a área descrita pelo raio vector da curva ao mover-se da posição OP_1 para a posição OP_n é dada pela fórmula:

$$Área = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \, d\theta \,,$$

onde ρ, expresso em termos de θ, provém da equação da curva.

2.4 Comprimento de um arco

Seja A um ponto fixo da curva e P outro ponto. Vamos seguidamente calcular o comprimento s do arco compreendido entre A e P.

Se Q é um ponto da curva próximo de P, o acréscimo Δs $(do\ arco\ PQ)$, satisfaz a igualdade

$$\lim_{Q\to P}\left(\frac{corda\ PQ}{arco\ PQ}\right)=1.$$

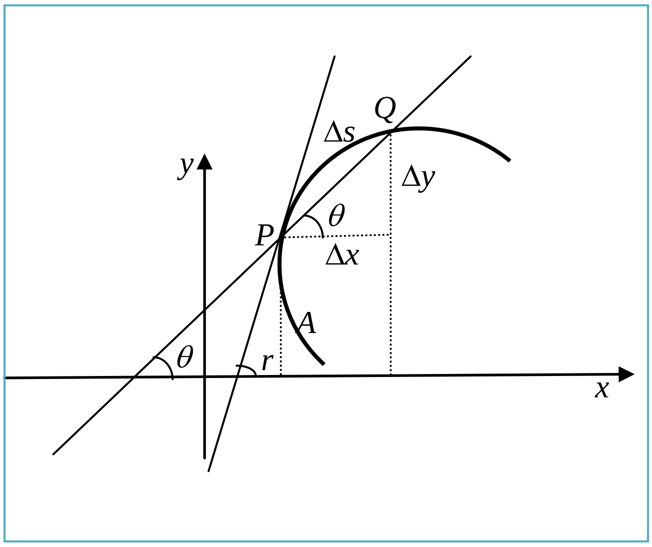

Figura 6

É fácil concluir, observando a figura que

$$(corda\ PQ)^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2.$$

Multiplicando e dividindo por $(\Delta s)^2$ o primeiro membro e dividindo ambos os membros por $(\Delta x)^2$, obtemos

$$\left(\frac{corda\ PQ}{\Delta s}\right)^2\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2=1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{ds}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Se extrairmos a raiz quadrada e multiplicarmos ambos os membros por dx, obtemos

$$ds=\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}dx.$$

Analogamente, multiplicando ambos os membros de $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ por dx^2, obtemos

$ds^2 = dx^2 + dy^2$ que multiplicando e dividindo o segundo membro por dy, resulta também

$$ds = \left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dy .$$

Usando as relações $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\, sen\theta$ entre coordenadas rectangulares e polares, obtemos

$$dx = \cos\theta\, d\rho - \rho sen\theta\, d\theta \text{ e } dy = sen\theta\, d\rho - \rho\cos\theta\, d\theta .$$

Substituindo estas expressões em $ds^2 = dx^2 + dy^2$, resulta

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta} ,$$

ou escrito de outro modo,

$$ds = \left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} d\theta .$$

Assim obtivemos a fórmula para o comprimento do arco,

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} d\theta ,$$

onde ρ e θ figuram em termos de θ e provêm da equação da curva dada.

No caso da curva ser dada na forma $\theta = \phi(\rho)$, então $d\theta = \phi'(\rho) d\rho = \frac{d\theta}{d\rho} d\rho$.

Substituindo esta última em $\left[\rho^2 d\theta^2 + d\rho^2\right]^{\frac{1}{2}}$, resulta

$$\left[\rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} d\rho .$$

Logo, se ρ_1 e ρ_2 são os correspondentes limites da variável independente ρ, obtemos a fórmula para o comprimento do arco.

$$s = \int_{\rho_1}^{\rho 2} \left[\rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} d\rho ,$$

onde $\frac{d\theta}{d\rho}$ em termos de ρ deve ser obtido da equação da curva dada.

2.5 Curvatura

A concavidade de uma curva depende da velocidade de mudança de direcção da curva. Esta velocidade, quando calculada num dado ponto, chama-se Curvatura K da curva no ponto.

Na figura Q é um ponto da curva próxima do ponto P, onde vamos calcular K. Quando P descreve o arco PQ $(=\Delta s)$, a tangente PT varia, tomando a posição QR quando P está sobre Q. Portanto o ângulo r que a tangente PT faz com OX recebe um acréscimo Δr.

Por definição a curvatura média do arco PQ é $\dfrac{\Delta r}{\Delta s}$ e a curvatura em P é o limite da curvatura média quando Q tende para P (movendo-se sobre a curva), isto é,

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} = \frac{dr}{ds}.$$

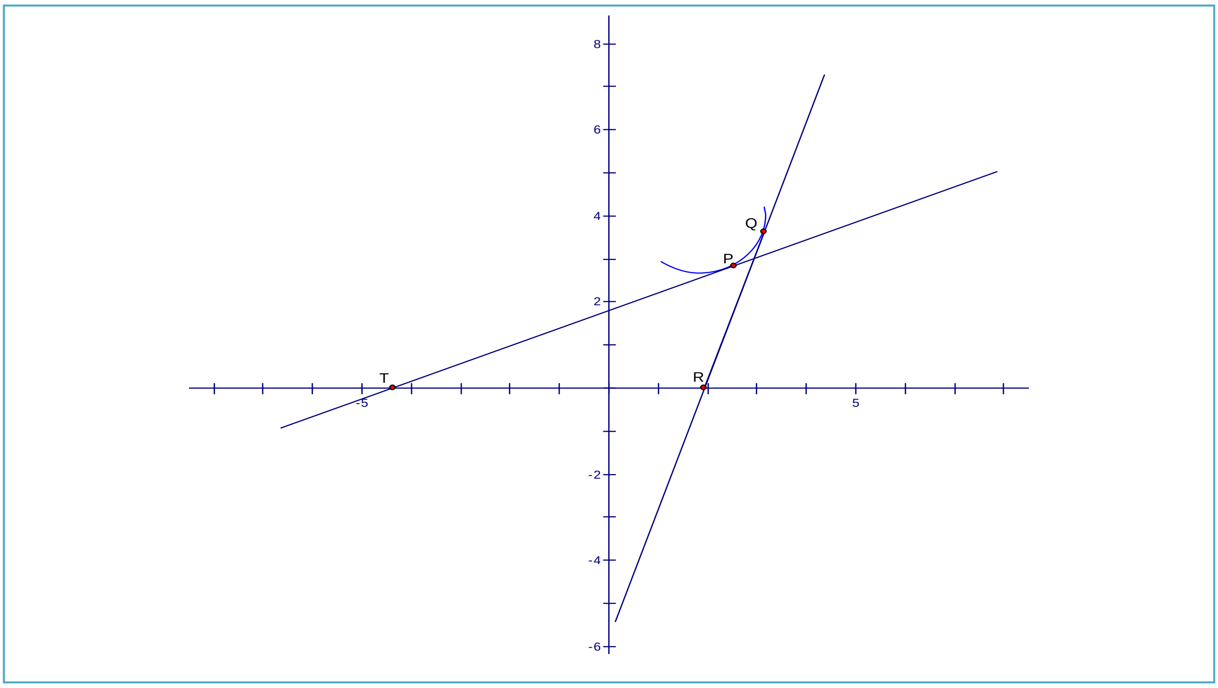

Figura 7

Teorema: Quando a equação de uma curva é dada em coordenadas polares a curvatura é dada por

$$K = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Demonstração: Se v é o ângulo formado pela tangente e o raio vector, então

$$r = \theta + v, \text{ logo } \quad \frac{dr}{d\theta} = 1 + \frac{dv}{d\theta} \ .$$

E pelo teorema da secção 3.1, $v = arctg\frac{\rho}{\rho'}$. Derivando esta última igualdade em ordem a θ, obtemos

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2} \ .$$

Consequentemente, dividindo $\frac{dr}{d\theta}$ por $\frac{ds}{d\theta} = \left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{ds}{d\theta} = \left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

obtém-se

$$\frac{\frac{dr}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}} = \frac{\frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}}{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow \frac{dr}{ds} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'}{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

isto é,

$$K = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}} \ . \qquad \blacksquare$$

2.6 Raio de Curvatura

O raio de curvatura R num ponto de uma curva é igual ao inverso da curvatura nesse ponto. Logo, pelo teorema anterior,

$$R = \frac{1}{K} = \frac{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'}.$$

3. Coordenadas Cartesianas

3.1 Curvatura

Seja $\alpha : I \to \Re^2$ uma curva parametrizada e seja $t_0 \in I$ um ponto fixo.

Para cada $t_0 \in I$, define-se

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\alpha^{'}(t)\right| dt,$$

onde $\left|\alpha^{'}(t)\right| = \sqrt{\left(x^{'}(t)\right)^2 + \left(y^{'}(t)\right)^2}$ é o comprimento do vector $\alpha^{'}(t)$.

Este novo parâmetro s é o comprimentp do traço entre $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t)$.

Se usarmos o parâmetro s em vez de t, isto é, se a curva for parametrizada pelo comprimento do arco, é fácil ver que

$\left|\alpha^{'}(t)\right| = 1$, bastando para tal derivar ambos os membros de $s = \int_0^s \left|\alpha^{'}(s)\right| ds$ em ordem a s.

A curvatura é mais fácil de obter com este parametro, ou seja

$$\left|\alpha^{''}(s)\right| = K,$$

onde K é a curvatura.

Vejamos de seguida que, de facto, $\left|\alpha^{''}(s)\right| = K$, onde $K = \dfrac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, em coordenadas polares.

Da secção 2.4 sabemos que $s = \int \left[\rho^2 + \left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\theta$, logo $\dfrac{ds}{d\theta} = \left(\rho^2 + \rho^{'2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Como $\alpha = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{s}en\theta)$ obtemos $\alpha^{'} = \left(\rho^{'}\cos\theta - \rho\,\mathrm{s}en\theta, \rho^{'}\,\mathrm{s}en\theta + \rho\cos\theta\right)$ e

$\alpha^{''} = \left(\rho^{''}\cos\theta - 2\rho^{'}\,\mathrm{s}en\theta - \rho\cos\theta, \rho^{''}sen\theta + 2\rho^{'}\cos\theta - \rho sen\theta\right)$.

Simples cálculos permitem obter os seguintes valores

$\left|\alpha^{'}\right|^2 = \rho^{'2} + \rho^2$;

$\alpha^{'}.\alpha^{''} = \rho\rho^{'} + \rho^{'}\rho^{''}$;

$\alpha^{''}.\alpha^{''} = \rho^2 + \rho^{''2} - 2\rho\rho^{''} + 4\rho^{'2}$.

Por definição

$$K=\left|\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right|=\left|\frac{d}{ds}\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)\right|=\left|\frac{d}{ds}\left(\alpha^{'}.\frac{d\theta}{ds}\right)\right|=\left|\frac{d}{ds}\left(\alpha^{'}.\frac{1}{\left|\alpha^{'}\right|}\right)\right|=$$

$$=\left|\alpha^{''}\frac{1}{\left|\alpha^{'}\right|^2}+\alpha^{'}\frac{d}{d\theta}\frac{1}{\left|\alpha^{'}\right|}.\frac{d\theta}{ds}\right|=$$

$$=\left|\frac{\alpha^{''}}{\left|\alpha^{'}\right|^2}+\alpha^{'}\left(-\frac{1}{2}\left(\alpha^{'}.\alpha^{'}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(2\alpha^{'}.\alpha^{''}\right)\frac{1}{\left|\alpha^{'}\right|}\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{\alpha^{''}}{\left|\alpha^{'}\right|^2}-\frac{\frac{\alpha^{'}}{\left|\alpha^{'}\right|}\left(\alpha^{'}.\alpha^{''}\right)}{\left|\alpha^{'}\right|^3}\right|=\left|\frac{\alpha^{''}\left|\alpha^{'}\right|-\frac{\alpha^{'}}{\left|\alpha^{'}\right|}\left(\alpha^{'}.\alpha^{''}\right)}{\left|\alpha^{'}\right|^3}\right|$$

$$=\frac{1}{\left|\alpha^{'}\right|^3}\left|\alpha^{''}\left|\alpha^{'}\right|-\alpha^{'}\frac{\left(\alpha^{'}.\alpha^{''}\right)}{\left|\alpha^{'}\right|}\right|=$$

$$=\frac{1}{\left(\rho^2+\rho^{'2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left|\left|\alpha^{'}\right|^2\alpha^{''}-\alpha^{'}\left(\alpha^{'}.\alpha^{''}\right)\right|\frac{1}{\left|\alpha^{'}\right|}=$$

$$=\frac{1}{\left(\rho^{'2}+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left|\left(\rho^{'2}+\rho^2\right)\alpha^{''}-\alpha^{'}\left(\rho\rho^{'}+\rho^{'}\rho^{''}\right)\right|\frac{1}{\left|\alpha^{'}\right|}.$$

O módulo de $\left|\left(\rho^{'2}+\rho^2\right)\alpha^{''}-\alpha^{'}\left(\rho\rho^{'}+\rho^{'}\rho^{''}\right)\right|$ é igual à raiz quadrada do produto interno de $\left(\rho^{'2}+\rho^2\right)\alpha^{''}-\alpha^{'}\left(\rho\rho^{'}+\rho^{'}\rho^{''}\right)$ por ele próprio.

Feitos os cálculos dá

$$\frac{1}{\left(\rho^{'2}+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left|\left(\rho^{'2}+\rho^2\right)\alpha^{''}-\alpha^{'}\left(\rho\rho^{'}+\rho^{'}\rho^{''}\right)\right|\frac{1}{\left|\alpha^{'}\right|}=$$

$$=\frac{1}{\left(\rho^{'2}+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\left|\alpha^{'}\right|}\sqrt{\left(\rho^{'2}+\rho^2\right)^2\alpha^{''}.\alpha^{''}+\left(\alpha^{'}.\alpha^{'}\right)\left(\rho\rho^{'}+\rho^{'}\rho^{''}\right)^2-2\left(\rho^{'2}+\rho^2\right)\left(\rho\rho^{'}+\rho^{'}\rho^{''}\right)\left(\alpha^{'}.\alpha^{''}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\left(\rho'^2+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\left|\alpha'\right|}\sqrt{\left(\rho'^2+\rho^2\right)\left(\left(\rho'^2+\rho^2\right)\alpha''.\alpha''+\left(\rho\rho'+\rho'\rho''\right)^2-2\left(\rho\rho'+\rho'\rho''\right)^2\right)}.$$

Como $\frac{1}{\left|\alpha'\right|}=\left(\rho'^2+\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}$, fica

$$\frac{1}{\left(\rho'^2+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\left(\rho'^2+\rho^2\right)\alpha''.\alpha''+\left(\rho\rho'+\rho'\rho''\right)^2-2\left(\rho\rho'+\rho'\rho''\right)^2},$$

e como $\alpha''.\alpha''=\rho^2+\rho''^2-2\rho\rho''+4\rho'^2$, vem

$$\frac{1}{\left(\rho'^2+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\left(\rho'^2+\rho^2\right)\left(\rho^2+\rho''^2-2\rho\rho''+4\rho'^2\right)+\left(\rho\rho'+\rho'\rho''\right)^2-2\left(\rho\rho'+\rho'\rho''\right)^2}=$$

$$\frac{1}{\left(\rho'^2+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{-4\rho'^2\rho^2+4\rho'^4+\rho^4+\rho^2\rho''^2-2\rho^3\rho''-4\rho\rho'^2\rho''}.$$

Mas como $\left(\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho'\right)^2=\rho^4+4\rho'^4+\rho^2\rho''^2+4\rho'^2\rho^2-2\rho^3\rho''-4\rho\rho'^2\rho''$, vem

$$\frac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho'}{\left(\rho^2+\rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

3.2 Centro de gravidade

Se tivermos uma curva homogênea e m for a massa por unidade de comprimento (densidade) divide-se a curva em n pedaços de comprimento Δs e toma-se $\left(x_i,y_i\right)$ em cada pedaço. A curva é semelhante a um sistema de n pontos $\left(x_i,y_i\right)$ em que cada $\left(x_i,y_i\right)$ tem massa $m\Delta s$.

O centro de gravidade é

$$x=\frac{\sum x_i m\Delta s}{\sum m\Delta s}=\frac{\sum x_i m\Delta s}{m\times comprimento\,total},\qquad y=\frac{\sum y_i m\Delta s}{\sum m\Delta s}=\frac{\sum y_i m\Delta s}{m\times comprimento\,total}.$$

Quando $n\to\infty$, $x=\frac{\int_{s_0}^{s_1}x(s)mds}{m\times comprimento\,total}$, $y=\frac{\int_{s_0}^{s_1}y(s)mds}{m\times comprimento\,total}$.

Então as coordenadas X e Y do centro de gravidade são $\left(X,Y\right)$ onde

$$\left(s_1-s_0\right)X=\int_{s_0}^{s_1}x(s)ds \qquad \text{e} \qquad \left(s_1-s_0\right)Y=\int_{s_0}^{s_1}y(s)ds.$$

4. Integrais elípticos

A integração de funções irracionais não pode ser sempre efectuada por meio de funções elementares. É o caso dos chamados integrais elípticos que vão aparecer no cálculo de comprimentos das curvas que são estudadas neste trabalho.

Francisco Gomes Teixeira, na obra Curso de Analyse Infinetesimal-Cálculo Integral, chama elíptico ao integral

$$\int f\left(x,\sqrt{y}\right)dx\,,$$

onde y é função inteira de x de terceiro ou quarto grau e $f\left(x,\sqrt{y}\right)$ é uma função racional de x e $\sqrt{y}$.

Na mesma obra estes integrais são divididos em três categorias, a saber:

Os integrais $\int\frac{dx}{\sqrt{y}}$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{y}}$, ..., $\int\frac{x^{\frac{n-3}{2}}dx}{\sqrt{y}}$, sendo n um número impar, dizem-se integrais elípticos de primeira espécie.

Os de segunda espécie são da forma $\int\frac{x^{\frac{n-1}{2}}dx}{\sqrt{y}}$, $\int\frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{y}}$, onde n é impar.

Aos integrais da forma

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{y}}$$

dá-se o nome de integrais elípticos de terceira espécie.

II Parte- As espirais

1. Espiral de Arquimedes

A espiral de Arquimedes é a curva gerada por um ponto móvel, com movimento uniforme, ao longo de uma linha recta, enquanto que esta gira, também com movimento uniforme, em torno de um ponto fixo, no caso deste ponto coincidir com o primeiro na sua posição inicial. Esta foi bem estudada já por Arquimedes daí a sua designação no Tratado que o consagrou.

A equação da espiral em coordenadas polares é

$$\rho = a\theta .$$

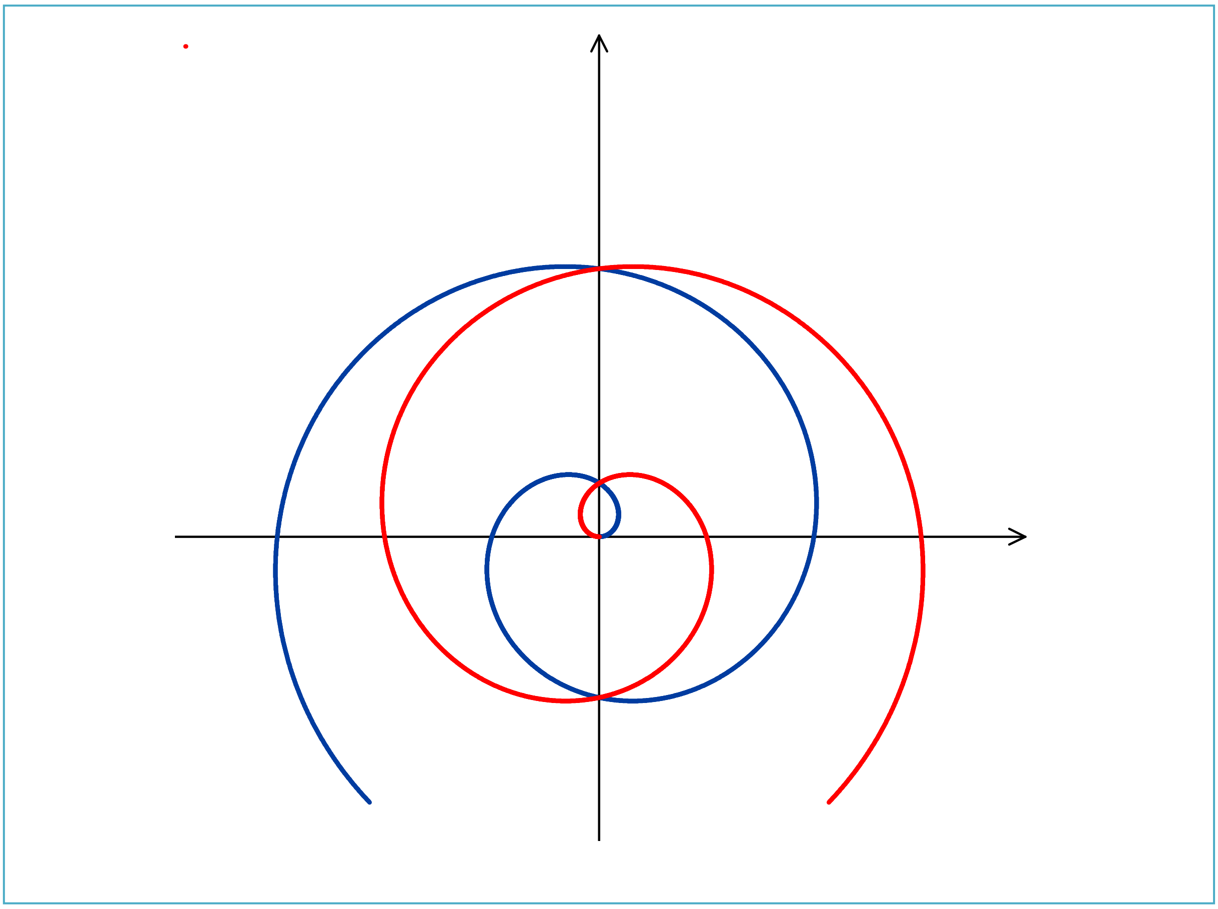

Figura 8- Espiral de Arquimedes

$a > 0$

Na figura encontram-se representados os dois ramos da curva, a azul o ramo que corresponde a valores positivos de θ, a vermelho valores negativos de θ.

Da equação deduz-se, imediatamente, que o ponto gerador da curva parte da origem das coordenadas e descreve depois um número infinito de voltas ou revoluções em torno do ponto inicial, afastando-se dele constantemente num sentido ou noutro, segundo o sentido inicial do movimento.

O ângulo v da tangente à curva com o raio vector é dado por $tgv = \frac{\rho}{\rho'}$. A equação $\rho = a\theta$ dá-nos $\frac{d\rho}{d\theta} = a$, logo

$$tgv = \frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\theta}} = \frac{\rho}{a}.$$

O comprimento da subnormal é $Sn = \frac{\rho}{tgv}$. Substituindo o valor encontrado antes

$$Sn = \frac{\rho}{\frac{\rho d\theta}{d\rho}} = \frac{\rho d\rho}{\rho d\theta} = a.$$

O comprimento da subtangente polar é $St = \rho tgv$. De novo substituindo tgv, $St = \rho\frac{\rho d\theta}{d\rho} = \rho^2\frac{d\theta}{d\rho} = \rho^2\frac{1}{a}$, que conjugando com a equação da curva $\rho = a\theta \Leftrightarrow a = \frac{\rho}{\theta}$, leva à forma

$$St = \rho\theta.$$

O comprimento da normal polar é $N^2 = \rho^2 + Sn^2 \Leftrightarrow N^2 = \rho^2 + a^2$, ou seja,

$$N = \sqrt{a^2 + \rho^2}.$$

O raio de curvatura em coordenadas polares é dado por

$$R = \frac{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$$

que, conjugando com as equações $\frac{d\rho}{d\theta} = a$ e $\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = 0$, permite obter o raio de curvatura da espiral de Arquimedes

$$R=\frac{\left(a^2+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2a^2}=\frac{N^3}{N^2+a^2}.$$

A área A percorrida pelo raio vector da espiral considerada, quando θ varia desde θ_0 até θ_1, é

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{(a\theta)^2}{2}d\theta=\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{a^2\theta^2}{2}d\theta=\frac{a^2}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\theta^2 d\theta=\frac{a^2}{2}\frac{\theta^3}{3}\Bigg]_{\theta_0}^{\theta 1}=\frac{a^2}{6}\theta_1^3-\frac{a^2}{6}\theta_0^3$$

$$A=\frac{a^2}{6}\left(\theta^3{}_1-\theta^3{}_0\right).$$

E, como $\rho=a\theta\Leftrightarrow\theta=\frac{\rho}{a}$,vem,

$$A=\frac{a^2}{6}\left(\left(\frac{\rho_1}{a}\right)^3-\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^3\right)=\frac{a^2}{6}\left(\left(\frac{\rho_1^3}{a^3}\right)-\left(\frac{\rho_0^3}{a^3}\right)\right)$$

$$A=\frac{1}{6a}\left(\rho_1^3-\rho_0{}^3\right).$$

Seja A_i a área do sector circular que contem o mesmo ângulo $\theta_1-\theta_0$ e tem raio $\rho_i, i=0{,}1$. Sabe-se que $A_i=\frac{\rho_i^2\pi\left(\theta_1-\theta_0\right)}{2\pi}$ como $\theta_i=\frac{\rho_i}{a}$, $A_i=\frac{1}{2a}\rho_i^2\left(\rho_1-\rho_0\right)$.

Segundo Gomes Teixeira, Arquimedes obteve as seguintes igualdades

$$\frac{A}{A_1}=\frac{\frac{1}{6a}\left(\rho_1{}^3-\rho_0^3\right)}{\frac{1}{2a}\rho_1^2\left(\rho_1-\rho_0\right)}=\frac{\left(\rho_1^3-\rho_0^3\right)}{3\rho_1^2\left(\rho_1-\rho_0\right)}=$$

$$=\frac{\left(\left(\rho_1-\rho_0\right)^3+3\rho_1{}^2\rho_0-3\rho_1\rho_0^2\right)}{3\rho_1^2\left(\rho_1-\rho_0\right)}=\frac{3\left(\frac{\left(\rho_1-\rho_0\right)^3}{3}+\rho_1\rho_0\left(\rho_1-\rho_0\right)\right)}{3\rho_1^2\left(\rho_1-\rho_0\right)}=\frac{\frac{1}{3}\left(\rho_1-\rho_0\right)^2+\rho_1\rho_0}{\rho_1^2},$$

e

$$\frac{A_1 - A}{A - A_0} = \frac{\frac{1}{2a}\rho_1^{\ 2}(\rho_1 - \rho_0) - \left(\frac{1}{6a}\left(\rho_1^{\ 3} - \rho_0^{\ 3}\right)\right)}{\frac{1}{6a}\left(\rho_1^{\ 3} - \rho_0^{\ 3}\right) - \left(\frac{1}{2a}\rho_0^{\ 2}(\rho_1 - \rho_0)\right)} =$$

$$= \frac{3\rho_1^2(\rho_1 - \rho_0) - (\rho_1 - \rho_0)^2(\rho_1 - \rho_0) + 3\rho_1^2\rho_0 - 3\rho_1\rho_0^2}{(\rho_1 - \rho_0)^2(\rho_1 - \rho_0) + 3\rho_1^2\rho_0 - 3\rho_1\rho_0^2 - 3\rho_0^2(\rho_1 - \rho_0)} =$$

$$= \frac{3\rho_1^2(\rho_1 - \rho_0) - (\rho_1 - \rho_0)^2(\rho_1 - \rho_0) + 3\rho_1\rho_0(\rho_1 - \rho_0)}{(\rho_1 - \rho_0)^2(\rho_1 - \rho_0) + 3\rho_1\rho_0(\rho_1 - \rho_0) - 3\rho_0^2(\rho_1 - \rho_0)} =$$

$$= \frac{3\rho_1^2 - (\rho_1 - \rho_0)^2 + 3\rho_1\rho_0}{(\rho_1 - \rho_0)^2 + 3\rho_1\rho_0 - 3\rho_0^2} = \frac{-(\rho_1 - \rho_0)^2 + 3\rho_1(\rho_1 - \rho_0)}{(\rho_1 - \rho_0)^2 + 3\rho_0(\rho_1 - \rho_0)} =$$

$$= \frac{-(\rho_1 - \rho_0) + 3\rho_1}{\rho_1 - \rho_0 + 3\rho_0} = \frac{-\rho_1 + \rho_0 + 3\rho_1}{\rho_1 + 2\rho_0} =$$

$$= \frac{2\rho_1 + \rho_0}{\rho_1 + 2\rho_0} = \frac{\rho_0 + \frac{2}{3}(\rho_1 - \rho_0)}{\rho_0 + \frac{1}{3}(\rho_1 - \rho_0)}.$$

Da fórmula $A = \frac{1}{6a}\left(\rho_1^3 - \rho_0^{\ 3}\right)$ deduz-se também, fazendo $\theta_0 = 2(n-1)\pi$, $\theta_1 = 2n\pi$ e representando por $A^{(n)}$ o valor da área percorrida pelo raio vector, quando este descreve a espiral na volta de ordem n, a igualdade

$$A^{(n)} = \frac{a^2}{6}\left((2n\pi)^3 - \left(2(n-1)\pi\right)^3\right), \text{ ou ainda}$$

$$A^n = \frac{4}{3}\pi^3 a^2\left(3n^2 - 3n + 1\right).$$

Desta última, deduzem-se outras igualdades, também obtidas por Arquimedes, das quais Gomes Teixeira destacou as seguintes:

$$A^{(1)} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2$$

$$A^{(2)} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 \left(3\times 4 - 3\times 2 + 1\right) = \frac{28}{3}\pi^3 a^2$$

$$A^{(2)} - A^{(1)} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 - \frac{28}{3}\pi^3 a^2 = 8\pi^3 a^2$$

$$A^{(n)} - A^{(n-1)} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 \left(3n^2 - 3n + 1\right) - \frac{4}{3}\pi^3 a^2 \left(3\left(n-1\right)^2 - 3\left(n-1\right) + 1\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi^3 a^2 \left(3n^2 - 3n + 1 - 3n^2 + 6n - 3 + 3n - 3 - 1\right) = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 \left(6n - 6\right)$$

$$A^{(n)} - A^{(n-1)} = 8\pi^3 a^2 \left(n-1\right)$$

$$A^{(1)} = \frac{1}{6}\left(A^{(2)} - A^{(1)}\right)$$

$$A^{(n)} - A^{(n-1)} = \left(n-1\right)\left(A^{(2)} - A^{(1)}\right).$$

O comprimento s do arco da espiral de Arquimedes, compreendido entre os pontos $\left(\rho_0, \theta_0\right)$ e $\left(\rho_1, \theta_1\right)$, é dado pela fórmula

$$s = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \sqrt{\rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2 + 1}\, d\rho$$ [I]

e, como $\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1}{a}$, vem,

$$s = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \sqrt{\rho^2 \frac{1}{a^2} + 1}\, d\rho = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \sqrt{\frac{1}{a^2}\left(\rho^2 + a^2\right)}\, d\rho =$$

$$s = \frac{1}{a}\int_{\rho_0}^{\rho_1} \sqrt{\rho^2 + a^2}\, d\rho.$$

[I] No Tratado das Curvas Especiais Notáveis de Gomes Teixeira $s = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \sqrt{\rho^2 \frac{d\theta}{d\rho} + 1}\, d\rho$

2. Espiral de Galileu

A espiral com equação

$$\rho = a - b\theta^2$$

apareceu aquando do estudo da curva descrita por um ponto pesado caindo sobre a terra, que entretanto, pode rodar sobre si e tomando como referencial a própria terra, segundo a lei de Galileu, daí a sua designação.

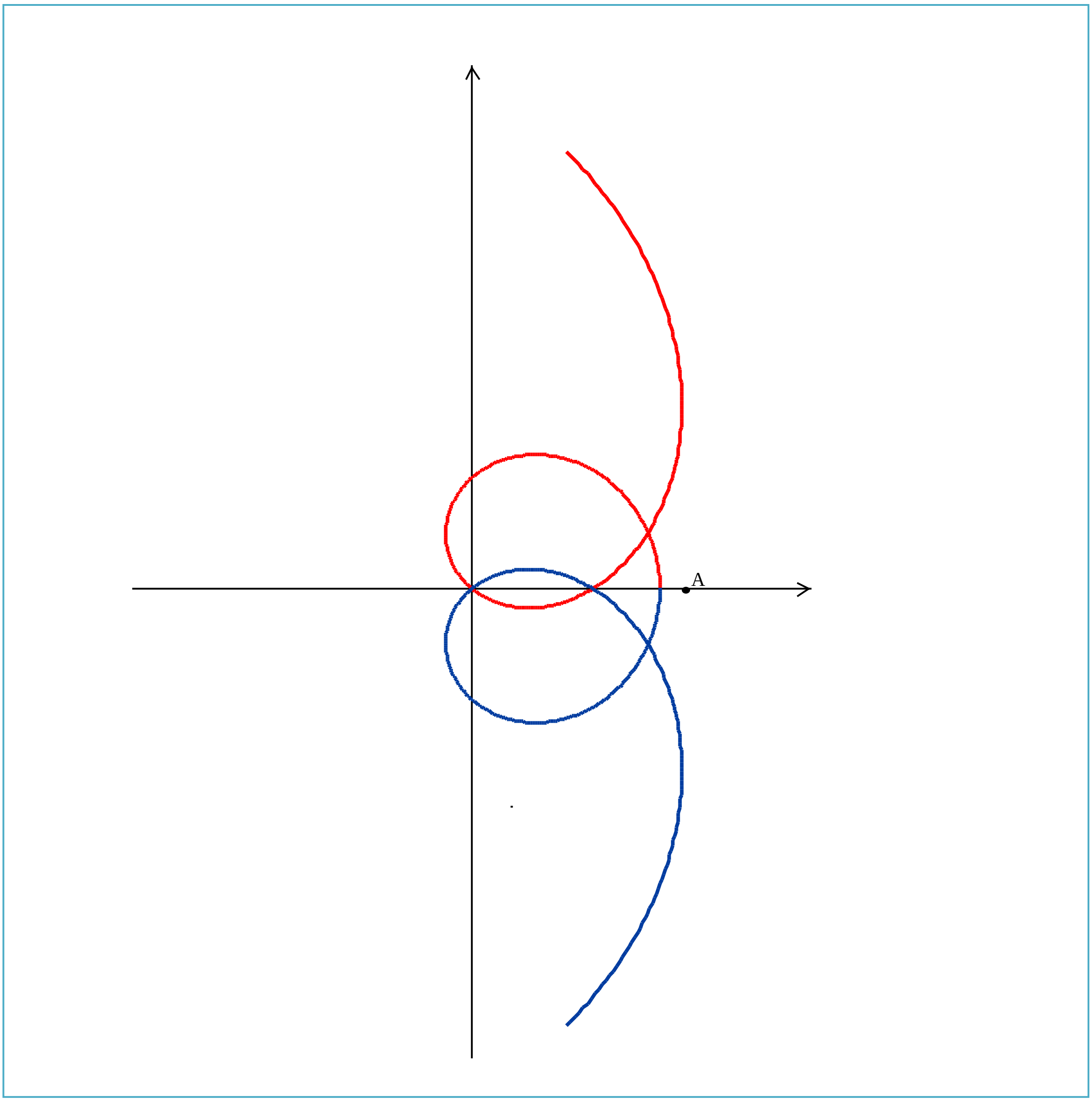

Figura 9- Espiral de Galileu

$a > 0$ e $b > 0$

A forma desta espiral é fácil de obter. Com a e b positivos, quando θ varia desde 0 até $\sqrt{\frac{a}{b}}$, ρ descresce desde a até 0; e quando depois θ varia desde $\sqrt{\frac{a}{b}}$ até ∞, o raio vector ρ é negativo e cresce em valor absoluto desde 0 até ∞. O ponto gerador da curva parte de A (onde se tem $OA=a$) e aproxima-se de 0 até encontrá-lo, descrevendo o arco, representado na figura, a vermelho e depois afasta-se indefinidamente deste ponto, dando um número infinito de voltas em torno do mesmo.

Aos valores negativos de θ corresponde o outro ramo da curva, representada na figura a cor azul simétrico ao primeiro ramo relativamente ao eixo Ox.

O ângulo formado pela tangente com o raio vector do ponto é $tgv=\frac{\rho}{\rho'}$.

Como $\frac{d\rho}{d\theta}=-2b\theta$ resulta

$$\frac{d\rho}{d\theta}=-2b\sqrt{\frac{a-\rho}{b}}\Leftrightarrow\frac{d\rho}{d\theta}=-2\sqrt{\frac{b^2(a-\rho)}{b}}\Leftrightarrow\frac{d\rho}{d\theta}=-2\sqrt{b(a-\rho)}\ ,$$

quando $\theta>0$.

Logo

$$tgv=\frac{\rho}{-2\sqrt{b(a-\rho)}}.$$

Esta fórmula mostra que no ponto A a tangente é perpendicular ao eixo de abcissas.

Substituindo as derivadas calculadas anteriormente na fórmula do raio de curvatura obtemos

$$R=\frac{\left(\rho^2+\rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}=\frac{\left(\rho^2+\left(-2\sqrt{b(a-\rho)}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\left(-2\sqrt{b(a-\rho)}\right)^2-\rho(-2b)}=\frac{\left(4b(a-\rho)+\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\left(4b(a-\rho)\right)+2b\rho}$$ pelo

que a expressão do raio de curvatura da curva, no ponto (ρ,θ) é

$$\frac{\left(\rho^2-4b\rho+4ba\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+8ba-6b\rho}.$$

Fazendo a substituição $\rho = a - b\theta^2$, o denominador não pode ser nulo, ou seja, existe em todos os pontos raio de curvatura, pelo que se conclui então que a curva não tem nenhum ponto de inflexão.

Para determinar os pontos duplos existentes no ramo da curva para os valores positivos de θ, basta atender que estes pontos devem evidentemente corresponder valores de θ, separados um do outro pelo arco $(2n+1)\pi$, sendo n um número inteiro e positivo, e, além disso, os valores de ρ devem ser iguais e de sinal contrário, conforme indicam tas expressões seguintes:

$$\rho = a - b\theta^2$$

$$-\rho = a - b\left[\theta + (2n+1)\pi\right]^2 \Leftrightarrow -\rho = a - b\left[\theta^2 + 2(2n+1)\pi\theta + (2n+1)^2\pi^2\right]^2$$

$$-\rho = a - b\theta^2 - 2(2n+1)\pi\theta b - (2n+1)^2\pi^2 b$$

Somando membro a membro $\rho = a - b\theta^2$ vem,

$$0 = a - b\theta^2 + a - b\theta^2 - 2(2n+1)\pi\theta b - (2n+1)^2\pi^2 b$$ e, multiplicando por -1, vem

$$0 = 2b\theta^2 + 2(2n+1)\pi\theta b + (2n+1)^2\pi^2 b - 2a$$

Aplicando a fórmula resolvente da equação do segundo grau, obtemos

$$\theta = \frac{-2(2n+1)\pi b \pm \sqrt{4(2n+1)^2\pi^2 b^2 - 4\times 2b\left[(2n+1)^2\pi^2 b - 2a\right]}}{2\times 2b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{-2(2n+1)\pi b \pm \sqrt{4(2n+1)^2\pi^2 b^2 - 8(2n+1)^2\pi^2 b^2 + 16ba}}{4b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{-2(2n+1)\pi b \pm \sqrt{-4(2n+1)^2\pi^2 b^2 + 16ba}}{4b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{-2(2n+1)\pi b \pm \sqrt{-4\left[(2n+1)^2\pi^2 b^2 + 4ba\right]}}{4b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{-2(2n+1)\pi b \pm 2\sqrt{-(2n+1)^2\pi^2 b^2 + 4ba}}{4b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{-(2n+1)\pi b \pm \sqrt{-(2n+1)^2 \pi^2 b^2 + 4ba}}{2b} \ . \qquad \text{II}$$

Os valores de θ podem ser imaginários, negativos ou positivos. Aos imaginários não correspondem pontos da curva; e aos negativos também não corresponde nenhum ponto do ramo considerado, basta, pois, considerar os valores positivos de θ.

Para que θ seja real, é necessário que se verifique a condição

$$4ab > b^2\pi^2(2n+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a > b\pi^2(2n+1)^2 .$$

E para que seja positivo necessita também que satisfaça a seguinte condição:

$$\left(\sqrt{4ab - b^2\pi^2(2n+1)^2}\right)^2 > \left((2n+1)^2 \pi b\right)^2$$

$$4ab - b^2\pi^2(2n+1)^2 > (2n+1)^2 \pi^2 b^2$$

$$-b^2\pi^2(2n+1)^2 - b^2\pi^2(2n+1)^2 > 4ab$$

$$-2b^2\pi^2(2n+1)^2 > 4ab$$

$$4ab > 2b^2\pi^2(2n+1)^2$$

$$2a > b\pi^2(2n+1)^2 .$$

A condição única para que o valor de θ seja real e positivo reduz-se, então à seguinte

$$2a > b\pi^2(2n+1)^2 ,$$

da qual se deduzem os valores de n a que correspondem os de θ, dados pela igualdade (A) pertencentes aos pontos de contacto procurados.

Fazendo, nas fórmulas anteriores, $n = 0$, conclui-se que somente existirão pontos de contacto quando se tem

$$2a > b\pi^2(2n+1)^2 \quad \text{e} \quad n = 0 \text{, ou seja,}$$

$$\Leftrightarrow 2a > b\pi^2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{\pi^2}{2} \Leftrightarrow$$

II No Tratado das Curvas Especiais Notáveis de Gomes Teixeira

$$\theta = \frac{-(2n+1)\pi b \pm \sqrt{(2n+1)^2 \pi^2 b^2 + 4ba}}{b}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} > \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Mas, para além dos pontos duplos acabados de determinar, a curva possui ainda os pontos existentes no ramo da curva que corresponde aos valores negativos de θ, simétricos aos anteriores relativamente ao eixo Ox, e os pontos pertencentes a este eixo, onde os ramos da curva se intersectam.

A área descrita pelo raio vector, quando θ varia desde 0, é dada pela fórmula

$$A = \frac{1}{2}\int_0^\theta \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\theta \left(a - b\theta^2\right)^2 d\theta$$

$$\int_0^\theta \left(a^2 - 2ab\theta^2 + b^2\theta^4\right) d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\left(a^2\theta - \frac{2ab\theta^3}{3} + \frac{b^2\theta^5}{5}\right)$$

O comprimento da curva obtém-se com auxílio dos integrais elípticos de primeira e segunda espécie, conforme se passa a demonstrar.

Sabe-se que

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

e que, portanto, no caso desta espiral,

$$ds = \left[\left(a - b\theta^2\right)^2 + \left(-2\sqrt{b\left(a-\rho\right)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} d\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ds = \left[a^2 - 2ab\theta^2 + b^2\theta^4 + 4b\left(a - \left(a - b\theta^2\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}} d\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ds = \left[a^2 - 2ab\theta^2 + b^2\theta^4 + 4ab - 4ab + 4b^2\theta^2\right]^{\frac{1}{2}} d\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ds = \left[\left(-2ab + 4b^2\right)\theta^2 + b^2\theta^4 + a^2\right]^{\frac{1}{2}} d\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ds = \left[2\left(-ab + 2b^2\right)\theta^2 + b^2\theta^4 + a^2\right]^{\frac{1}{2}} d\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ds = \sqrt{b^2\theta^4 + 2\left(-ab + 2b^2\right)\theta^2 + a^2}\, d\theta.$$

Fazendo a substituição da variável θ

$$\theta^2 = z$$

e diferenciando vem,

$$2\theta d\theta = dz \Leftrightarrow d\theta = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$$

Substituindo em ds vem

$$ds = \frac{b^2z^2 + 2\left(2b^2 - ab\right)z + a^2}{\sqrt{\left(b^2z^2 + 2\left(2b^2 - ab\right)z + a^2\right)}} \frac{dz}{2\sqrt{Z}} \Leftrightarrow$$

$$ds = \frac{1}{2} \frac{b^2z^2 + 2\left(2b^2 - ab\right)z + a^2}{\sqrt{z\left(b^2z^2 + 2\left(2b^2 - ab\right)z + a^2\right)}} dz . \qquad (1)$$

Esta expressão pode ser escrita de outra forma, a saber:

$$ds = \frac{1}{6} \frac{\left[F^{'}\left(z\right) + 2\left(2b^2 - ab\right)z + 2a^2\right]}{\sqrt{F\left(z\right)}} dz , \qquad (2)$$

tomando

$$z\left[b^2z^2 + 2\left(2b^2 - ab\right)z + a^2\right] = F\left(z\right)$$ [III]

Vejamos que a partir desta expressão em $F\left(z\right)$ se obtém a anterior.

De facto,

$$F^{'}\left(z\right) = b^2z^2 + 4b^2z - 2abz + a^2 + 2b^2z^2 + 4b^2z - 2abz + a^2z =$$

$$= 3b^2z^2 + \left(4b^2 + 4b^2 - 2ab - 2ab\right)z + a^2$$

$$F^{'}\left(z\right) = 3b^2z^2 + \left(8b^2 - 4ab\right)z + a^2 .$$

Assim sendo

$F^{'}\left(z\right) + 2\left(2b^2 - ab\right)z + 2a^2$ é igual a

$$3b^2z^2 + \left(8b^2 - 4ab\right)z + a^2 + 2\left(2b^2 - ab\right)z + 2a^2 =$$

$$= 3b^2z^2 + 8b^2z - 4abz + a^2 + 4b^2z - 2abz + 2a^2 =$$

III No Tratado das Curvas Especiais Notáveis de Gomes Teixeira

$$z^2\left[b^2z^2 + 2\left(2b^2 - ab\right)z + a^2\right] = F\left(z\right)$$

$$= 3b^2z^2 + (8b^2 + 4b^2 - 4ab - 2ab)z + 3a^2 =$$

$$= 3b^2z^2 + \left(12b^2 - 6ab\right) z + 3a^2 =$$

$$= 3b^2z^2 + 6(2b^2 - ab)z + 3a^2$$

,ou seja, $\frac{1}{3}$ do que está no numerador de (1). Fica assim provado que (1) e (2) são iguais.

Sendo assim

$$ds = \frac{1}{6}\left[\frac{F'(z) + 2\left(2b^2 - ab\right)z + 2a^2}{\sqrt{F(z)}}\right]dz$$

que é equivalente a

$$ds = \frac{1}{6}\left[2d\sqrt{F(z)} + \frac{2\left(\left(2b^2 - ab\right)z + a^2\right)}{\sqrt{F(z)}}dz\right],$$

$$\text{a} \quad ds = \frac{2}{6}\left[d\sqrt{F(z)} + \frac{\left(2b^2 - ab\right)z + a^2}{\sqrt{F(z)}}dz\right]$$

$$\text{e a} \quad ds = \frac{1}{3}\left[d\sqrt{F(z)} + \frac{\left(2b^2 - ab\right)z + a^2}{\sqrt{F(z)}}dz\right].$$ [IV]

Para conseguir desprezar o termo do segundo grau em $F(z)$, admitamos que

$$z = v + h \quad \text{e} \quad h = -\frac{2}{3}\frac{2b - a}{b}.$$

Fazendo a substituição em $F(z)$, vem

$$F(z) = b^2z^3 + 2\left(2b^2 - ab\right)z^2 + a^2z =$$

$$F(z) = b^2(v+h)^3 + 2\left(2b^2 - ab\right)(v+h)^2 + a^2(v+h) =$$

$$F(z) = b^2v^3 + b^2hv^2 + 2b^2hv^2 + b^2h^3 + 2h^2b^2v + b^2h^2v + 4b^2v^2 +$$
$$+ 8b^2hv + 4b^2h^2 - 2abv^2 - 4abhv - 2abh^2 + a^2v + a^2h =$$

IV No Tratado das Curvas Especiais Notáveis de Gomes Teixeira

$$ds = \frac{1}{3}\left[dF(z) + \frac{\left(2b^2 - ab\right)z + a^2}{\sqrt{F(z)}}dz\right]$$

$$F(z)=b^2v^3+\left(3hb^2+4b^2-2ab\right)v^2+\left(3h^2b^2+8b^2h-4abh+a^2\right)v+$$
$$+h^3b^2+4b^2h^2-2abh^2+a^2h\,.$$

E como $h=-\dfrac{2}{3}\dfrac{2b-a}{b}$,

$$F(z)=b^2v^3+\left[3\left(-\frac{2}{3}\frac{(2b-a)}{b}\right)b^2+4b^2-2ab\right]v^2+\left[3h^2b^2+8b^2h-4abh+a^2\right]v+$$
$$+h^3b^2+4b^2h^2-2abh^2+a^2h=$$

$$F(z)=b^2v^3+\left[(-4b+2a)b+4b^2-2ab\right]v^2+\left[3h^2b^2+8b^2h-4abh+a^2\right]v+$$
$$+h^3b^2+4b^2h^2-2abh^2+a^2h=$$

$$F(z)=b^2v^3+0v^2+\left[3h^2b^2+8b^2h-4abh+a^2\right]v+h^3b^2+4b^2h^2-2abh^2+a^2h=$$

$$F(z)=b^2v^3+\left[3h^2b^2+4hb(2b-a)+a^2\right]v+h^3b^2+2b(2b-a)h^2+a^2h=$$

$$F(z)=b^2v^3+\left[3h^2b^2+3b^2\frac{2(2b-a)}{3b}2h+a^2\right]v+h^3b^2+2\times 3b^2\frac{(2b-a)}{3b}h^2+a^2h=$$

$$F(z)=b^2v^3+\left[3h^2b^2-6b^2h^2+a^2\right]v+b^2h^3-3b^2h^3+a^2h\,.$$

Substituindo, agora $F(z)$ em ds vem

$$ds=\frac{1}{3}\left[d\sqrt{b^2v^3+\left[-3b^2h^2+a^2\right]v-2b^2h^3+a^2h}+\frac{\left(2b^2-ab\right)(v+h)+a^2}{\sqrt{b^2v^3+\left[-3b^2h^2+a^2\right]v-2b^2h^3+a^2h}}dv\right]$$

$$ds=\frac{1}{3}\left[\frac{b}{2}d\sqrt{4v^3+\left[-12h^2+4\frac{a^2}{b^2}\right]v+\left(-8h^3+\frac{4a^2h}{b^2}\right)}+\frac{b(2b-a)v+\left(2b^2-ab\right)h+a^2}{\frac{b}{2}\sqrt{4v^3+\left[-12h^2+4\frac{a^2}{b^2}\right]v+\left(-8h^3+\frac{4a^2h}{b^2}\right)}}dv\right]$$

$$ds=\frac{1}{3}\left[\frac{b}{2}d\sqrt{4v^3+\left[-12h^2+4\frac{a^2}{b^2}\right]v+\left(-8h^3+\frac{4a^2h}{b^2}\right)}+\frac{b(2b-a)vdv}{\frac{b}{2}\sqrt{4v^3+\left[-12h^2+4\frac{a^2}{b^2}\right]v+\left(-8h^3+\frac{4a^2h}{b^2}\right)}}\right]+$$
$$+\frac{1}{3}\left[\frac{\left(2b^2-ab\right)h+a^2dv}{\frac{b}{2}\sqrt{4v^3+\left[-12h^2+4\frac{a^2}{b^2}\right]v+\left(-8h^3+\frac{4a^2h}{b^2}\right)}}\right]$$

$$ds=\frac{1}{3}\left[\frac{b}{2}d\sqrt{4v^3+\left[-12h^2+4\frac{a^2}{b^2}\right]v+\left(-8h^3+\frac{4a^2h}{b^2}\right)}+\frac{2(2b-a)v\,dv}{\sqrt{4v^3+\left[-12h^2+4\frac{a^2}{b^2}\right]v+\left(-8h^3+\frac{4a^2h}{b^2}\right)}}\right]+$$

$$+\frac{1}{3}\left[\frac{2\left(2b^2+ab\right)h+2a^2\,dv}{b\sqrt{4v^3+\left[-12h^2+4\frac{a^2}{b^2}\right]v+\left(-8h^3+\frac{4a^2h}{b^2}\right)}}\right].$$

Logo fazendo $g_1=12h^2-\dfrac{4a^2}{b^2}$ e $g_2=8h^3-\dfrac{4a^2h}{b^2}$. V

$$ds=\frac{1}{3}\left[\frac{b}{2}d\sqrt{4v^3-g_1v-g_2}+\frac{2(2b-a)v\,dv}{\sqrt{4v^3-g_1v-g_2}}+\frac{2\left(\left(2b^2-ab\right)h+a^2\right)dv}{b\sqrt{4v^3-g_1v-g_2}}\right].\quad \text{VI}$$

De maneira que, com efeito, s depende de dois integrais elípticos, um de primeira e outro de segunda espécie, reduzidos à forma adoptada por WEIERSTRASS. VII

E, além disso, note-se, em conclusão, que um dos integrais desaparece quando $b=\dfrac{1}{2}a$.

V No Tratado das Curvas Especiais Notáveis de Gomes Teixeira $g_1=12h^2-\dfrac{a^2}{b^2}$

VI No Tratado das Curvas Especiais Notáveis de Gomes Teixeira

$$ds=\frac{1}{3}\left[\frac{b}{2}d\sqrt{4v^3-g_1v-g_2}+\frac{2(2b-a)v\,dv}{\sqrt{4v^3-g_1v-g_2}}+\frac{2a^2\,dv}{b\sqrt{4v^3-g_1v-g_2}}\right]$$

VII No capitulo IX, da obra Curso de Analyse Infinetesimal-Cálculo Integral, Gomes Teixeira refere que a função $u=\int_z^\infty\dfrac{dx}{4x^3-g_2x-g_3}$ foi estudada por WEIERSTRASS, e representa um papel importante na teoria das funções elípticas.

3. Espiral de Fermat

A chamada espiral de FERMAT, estudada pelo grande geómetra de Toulouse, tem por equação,

$$\rho^2 = a^2\theta$$

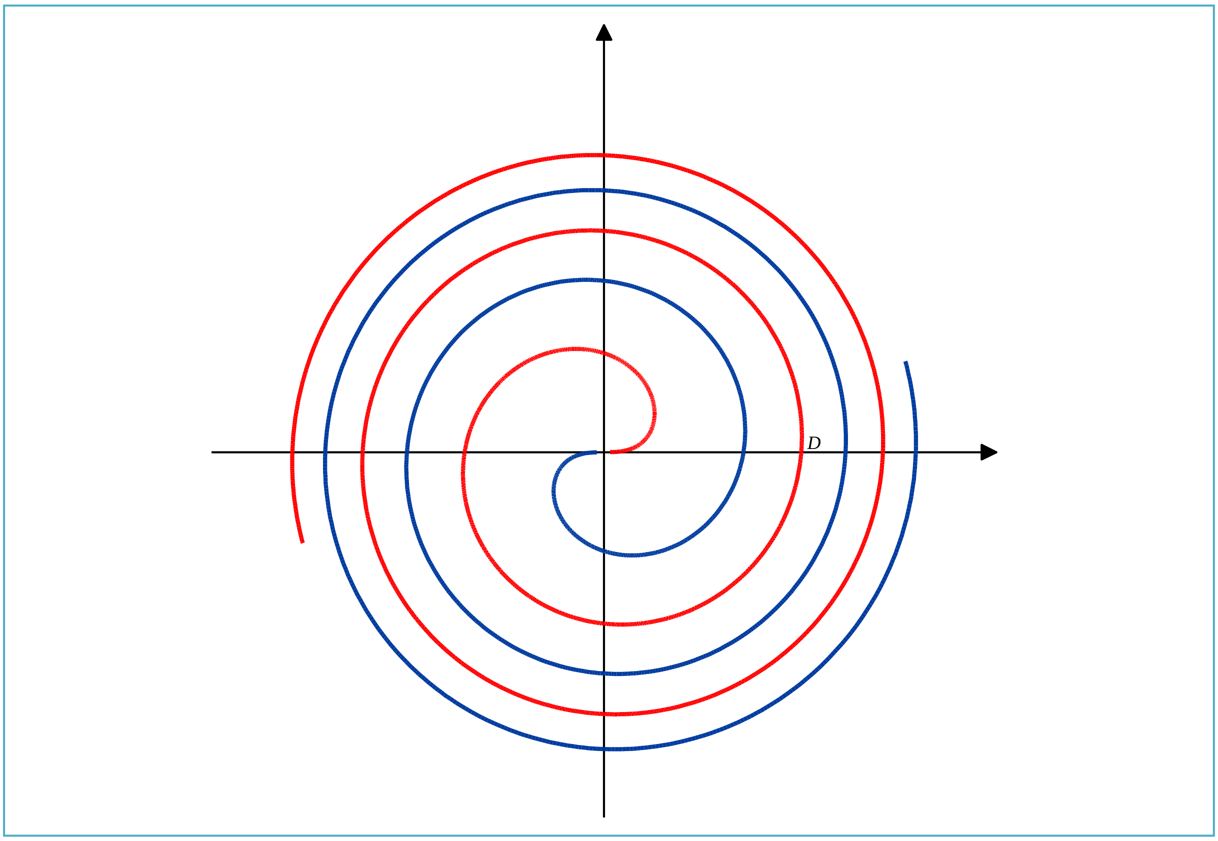

Figura 10-Espiral de Fermat

Quando θ varia de 0 até ∞, os valores correspondentes de ρ, aumentam também de 0 até ∞. O ponto gerador da curva dá um número infinito de voltas em torno da origem das coordenadas, descrevendo a curva representada a cor vermelha na figura, afastando-se cada vez mais da origem, onde a curva é tangente ao eixo das abcissas. Aos valores negativos de ρ corresponde o ramo representado a azul da curva, igual à primeira e também tangente no ponto O ao eixo das abcissas. Os dois ramos reunidos formam uma curva contínua, da qual a origem é um ponto de inflexão e um centro de simetria.

O ângulo v, formado pela tangente com o raio vector do ponto de contacto é dado por, $tgv = \frac{\rho}{\rho'}$.

Para obter ρ' deriva-se implicitamente a equação da curva. Assim,

$$2\rho\frac{d\rho}{d\theta} = a^2 \Leftrightarrow \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{a^2}{2\rho}.$$

Substituindo em tgv temos

$$tgv = \frac{\rho}{\frac{a^2}{2\rho}} \Leftrightarrow tgv = \frac{2\rho^2}{a^2}.$$

Como a subnormal é dada por:

$$Sn = \frac{\rho}{tgv} \Leftrightarrow \frac{\rho}{\frac{2\rho^2}{a^2}} = \frac{\rho a^2}{2\rho^2},$$

vem

$$Sn = \frac{a^2}{2\rho}.$$

A subtangente por ser $St = \rho tg\, v$, vem

$$St = \rho\frac{2\rho^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{2\rho^3}{a^2}.$$

Para obter o raio de curvatura precisamos encontrar $\frac{d^2\rho}{d\theta^2}$ elo que obtemos

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = -\frac{2a^2\frac{d\rho}{d\theta}}{4\rho^2}0 \Leftrightarrow \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = -\frac{a^4}{4\rho^3}.$$

Substituindo na expressão $R = \frac{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$, fica

$$R = \frac{\left(\rho^2 + \frac{a^4}{4\rho^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\rho^2 + 2\frac{a^4}{4\rho^2} + \rho\frac{a^4}{4\rho^3}\right)} = \frac{\left(\rho^2 + \frac{a^4}{4\rho^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + \frac{3a^4}{4\rho^2}}.$$

A área descrita pelo raio vector quando θ varia desde θ_0 até θ_1 é

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} a^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\left[a^2 \frac{\theta^2}{2}\right]_{\theta_0}^{\theta_1} =$$

$$A = \frac{a^2}{4}\left(\theta_1^2 - \theta_0^2\right).$$

A partir deste resultado deduz-se que as áreas varidas pelo raio vector em cada volta completa, isto é, quando θ varia de $\theta_0 = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ e $\theta_1 = \theta_0 + 2\pi$ são dadas por

$$A_1 = \frac{a^2}{4}\left((2\pi)^2 - 0^2\right) = \frac{4a^2\pi^2}{4} = a^2\pi^2$$

$$A_2 = \frac{a^2}{4}\left((4\pi)^2 - (2\pi)^2\right) = \frac{a^2}{4}\left(16\pi^2 - 4\pi^2\right) = 3a^2\pi^2$$

$$A_3 = \frac{a^2}{4}\left((6\pi)^2 - (4\pi)^2\right) = \frac{a^2}{4}\left(36\pi^2 - 16\pi^2\right) = 5a^2\pi^2$$

$$\ldots$$

Estas permitem concluir que por se ter $OD = a\sqrt{2\pi}$ o círculo de centro O que contem D tem área $2\pi^2a^2$ que é o dobro da área A_1; a diferença dos números sucessivos da série $A_1, A_2, A_3, \ldots$ é constante, o aumento da área em cada revolução é igual à área do círculo com o mesmo raio.

$$A_2 - A_1 = 3a^2\pi^2 - a^2\pi^2 = 2a^2\pi^2$$

$$A_3 - A_2 = 5a^2\pi^2 - 3a^2\pi^2 = 2a^2\pi^2.$$

O comprimento do arco, compreendido entre o ponto O e o ponto (ρ, θ) tem por expressão:

$$s = \int_0^{\theta} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{\theta} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{a^2}{2\sqrt{a^2\theta}}\right)^2} d\theta =$$

$$= \int_0^{\theta} \sqrt{a^2\theta + \frac{a^4}{4a^2\theta}} d\theta = \int_0^{\theta} \sqrt{\frac{4a^4\theta^2 + a^4}{4a^2\theta}} d\theta =$$

$$= \int_0^{\theta} \sqrt{\frac{a^4\left(4\theta^2 + 1\right)}{4a^2\theta}} d\theta = \frac{a}{2}\int_0^{\theta} \sqrt{\frac{4\theta^2 + 1}{\theta}} d\theta =$$

$$=\frac{a}{2}\int_0^\theta \frac{4\theta^2+1}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}\,d\theta .$$

Este integral é composto por um integral elíptico e outro resolúvel como veremos seguidamente.

$$s=\frac{a}{2}\int_0^\theta \frac{4\theta^2+1}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}\,d\theta=\frac{a}{2}\left[\int_0^\theta \frac{4\theta^2}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}\,d\theta+\int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}d\theta\right]$$

Integrando por partes o integral $\int_0^\theta \frac{4\theta^2}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}\,d\theta$ obtém-se

$$\int_0^\theta \frac{4\theta^2}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}\,d\theta=4\int_0^\theta \frac{\theta}{\sqrt{\theta}}\times\frac{\theta}{\sqrt{4\theta^2+1}}\,d\theta=\int_0^\theta \sqrt{\theta}\times\frac{\theta}{\sqrt{4\theta^2+1}}\,d\theta$$

$$4\sqrt{\theta}\times\frac{2}{8}\left(4\theta^2+1\right)^{\frac{1}{2}}-4\int_0^\theta \frac{1}{2}\theta^{-\frac{1}{2}}\times\frac{2}{8}\times\left(4\theta^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta$$

$$4\times\frac{1}{8}\left[2\times\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}-\int_0^\theta \frac{\sqrt{\left(4\theta^2+1\right)}}{\sqrt{\theta}}d\theta\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[2\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}-\int_0^\theta \frac{4\theta^2+1}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}d\theta\right]= \quad \text{VIII}$$

$$=\frac{1}{2}\left[2\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}-\int_0^\theta \frac{4\theta^2}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}d\theta-\int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}d\theta\right].$$

De notar que o penúltimo integral é igual ao inicial $\int_0^\theta \frac{4\theta^2+1}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}\,d\theta$, portanto

$$\int_0^\theta \frac{4\theta^2}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}\,d\theta=\frac{1}{2}\left[2\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}-\int_0^\theta \frac{4\theta^2}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}d\theta-\int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}d\theta\right].$$

VIII No Tratado das Curvas Especiais Notáveis de Gomes Teixeira

$$\frac{1}{2}\left[2\times\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}-\int_0^\theta \frac{4\theta^2+1}{\sqrt{\left(4\theta^2+1\right)}}d\theta\right]$$

Resolvendo a equação em ordem a $\int_0^{\theta} \frac{4\theta^2}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}\, d\theta$

$$\int_0^{\theta} \frac{4\theta^2}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}\, d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\theta} \frac{4\theta^2}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}} d\theta = \sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)} - \frac{1}{2}\int_0^{\theta} \frac{1}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}} d\theta$$

$$\frac{3}{2}\int_0^{\theta} \frac{4\theta^2}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}\, d\theta = \sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)} - \frac{1}{2}\int_0^{\theta} \frac{1}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}} d\theta$$

$$\int_0^{\theta} \frac{4\theta^2}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}\, d\theta = \frac{2}{3}\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)} - \frac{1}{3}\int_0^{\theta} \frac{1}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}} d\theta$$

que substituindo na expressão de s, fica

$$s = \frac{a}{2}\left[\frac{2}{3}\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)} - \frac{1}{3}\int_0^{\theta} \frac{1}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}} d\theta + \int_0^{\theta} \frac{1}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}\, d\theta\right]$$

$$s = \frac{a}{2}\left[\frac{2}{3}\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)} + \frac{2}{3}\int_0^{\theta} \frac{1}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}} d\theta\right]$$

$$s = \frac{a}{3}\left[\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)} + \int_0^{\theta} \frac{1}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}} d\theta\right]$$

cujo valor depende exclusivamente de um integral elíptico de primeira espécie.

4. Espiral Parabólica

A curva pertence a um grupo de curvas estudadas por JACOBO BERNOULLI e às quais aquele notável geômetra deu o nome de espirais parabólicas.

Estas curvas têm a seguinte equação geral:

$\left(\rho - a\right)^2 = 2pa\theta$.

Note-se que o sinal que, evidentemente, o sinal de θ é o mesmo que o produto entre as constantes a e p.

As espirais parabólicas são compostas por dois ramos.

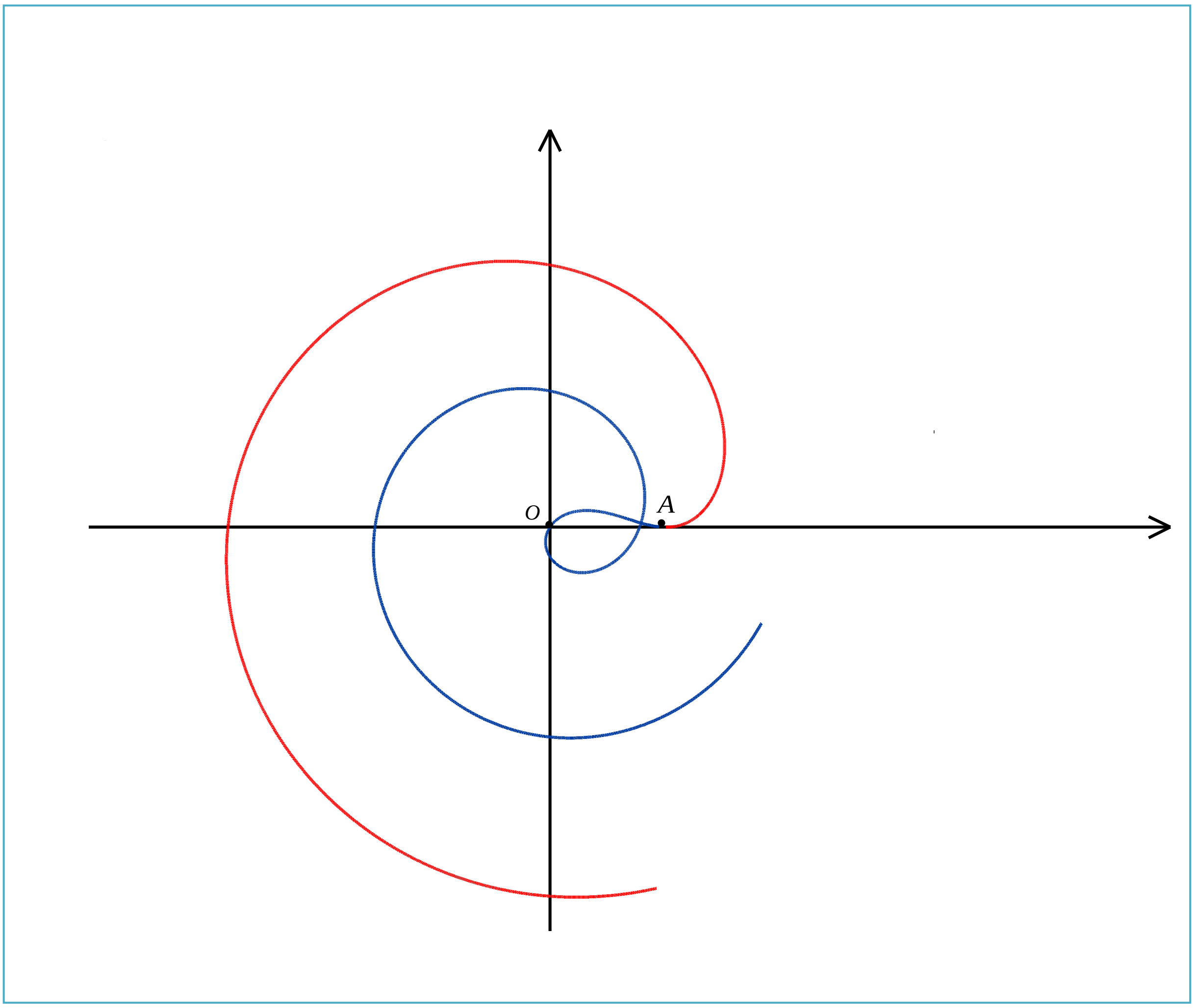

Figura 11- Espiral Parabólica

$a > 0$ e $p > 0$

O ramo representado a vermelho corresponde à equação:

$$\rho = a + \sqrt{2pa\theta}\ .$$

Parte do ponto A, onde $\theta = 0$ e $\rho = OA = a$, e dá um número infinito de voltas em torno de O, afastando-se indefinidamente deste ponto.

O segundo ramo, a azul na figura, corresponde à equação

$$\rho = a - \sqrt{2pa\theta}\ ,$$

parte do mesmo ponto A e aproxima-se cada vez mais de O, encontrando-o quando

$$\rho = 0 \Leftrightarrow 0 = a - \sqrt{2pa\theta}$$

$$a = \sqrt{2pa\theta} \Rightarrow a^2 = 2pa\theta$$

$$\theta = \frac{a}{2p}$$

e depois afasta-se indefinidamente do mesmo ponto.

Note-se que tangente à curva no ponto $O = \left(0, \frac{a}{2\rho}\right)$ forma um ângulo igual a $\frac{a}{2p}$ com o eixo das abcissas. Nos restantes pontos as tangentes podem ser determinadas a partir de

$tgv = \frac{\rho}{\rho'}$.

Derivando a equação da curva em ordem a θ vem

$$2\frac{d\rho}{d\theta}(\rho - a) = 2pa \Leftrightarrow \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{pa}{(\rho - a)}$$

logo

$$tgv = \frac{\rho}{\frac{pa}{(\rho - a)}} = \frac{\rho(\rho - a)}{pa}.$$

A subtangente é

$$St = \rho tgv = \rho\frac{\rho(\rho - a)}{pa} = \frac{\rho^2(\rho - a)}{pa}.$$

A curva tem pontos de contacto duplo. Para determiná-los é necessário encontrar pontos (ρ, θ) e $(-\rho, \theta + (2n+1)\pi)$da curva, sendo n um número inteiro e positivo. Como são pontos da curva, advêm da intersecção de ambos os ramos, ou de intersectar um dos ramos em si mesmo, verifica-se que:

$\rho = a \pm \sqrt{2pa\theta}$ e $-\rho = a \pm \sqrt{2pa[\theta + (2n+1)\pi]}$

Analisando caso a caso, vem:

- se $\rho = a + \sqrt{2pa\theta}$, $-\rho$ não pode ser $-\rho = a + \sqrt{2pa[\theta + (2n+1)\pi]}$;
- se $\rho = a - \sqrt{2pa\theta}$, $-\rho$ não pode ser $-\rho = a + \sqrt{2pa[\theta + (2n+1)\pi]}$

resta assim dois casos possíveis:

- $\rho = a + \sqrt{2pa\theta}$ e $-\rho = a - \sqrt{2pa[\theta + (2n+1)\pi]}$;
- $\rho = a - \sqrt{2pa\theta}$ e $-\rho = a - \sqrt{2pa[\theta + (2n+1)\pi]}$.

Por eliminação de ρ, somando membro a membro cada par obtemos

$$-\rho+\rho=a+\sqrt{2pa\left[\theta+(2n+1)\pi\right]}+a\pm\sqrt{2pa\theta}$$

$$-2a=\sqrt{2pa\left[\theta+(2n+1)\pi\right]}\pm\sqrt{2pa\theta}$$

e elevando ambos os membros ao quadrado,

$$4a^2=2pa\left[\theta+(2n+1)\pi\right]+2pa\theta\pm2\sqrt{4p^2a^2\theta\left[\theta+(2n+1)\pi\right]}$$

$$4a^2-2pa\left[\theta+(2n+1)\pi\right]-2pa\theta=\pm2\sqrt{4p^2a^2\theta\left[\theta+(2n+1)\pi\right]}$$

$$4a^2-2pa\left[\theta+(2n+1)\pi+\theta\right]=\pm2\sqrt{4p^2a^2\theta\left[\theta+(2n+1)\pi\right]}$$

$$4a^2-2pa\left[2\theta+(2n+1)\pi\right]=\pm2\sqrt{4p^2a^2\theta\left[\theta+(2n+1)\pi\right]}.$$

Quadrando, de novo ambos os membros vem

$$\left\{4a^2-2pa\left[2\theta+(2n+1)\pi\right]\right\}^2=4\left(4p^2a^2\theta\left[\theta+(2n+1)\pi\right]\right)$$

e portanto,

$$16a^4-16a^3p\left[2\theta+(2n+1)\pi\right]+4p^2a^2\left[4\theta^2+4\theta(2n+1)\pi+(2n+1)^2\pi^2\right]=$$
$$=16p^2a^2\theta^2+16p^2a^2\theta(2n+1)\pi$$

$$16a^4-32a^3p\theta-16a^3p(2n+1)\pi+16p^2a^2\theta^2+16p^2a^2\theta(2n+1)\pi+4p^2a^2(2n+1)^2\pi^2=$$
$$=16p^2a^2\theta^2+16p^2a^2\theta(2n+1)\pi$$

$$32a^3p\theta=16a^4-16a^3p(2n+1)\pi+4p^2a^2(2n+1)^2\pi^2$$

$$\theta=\frac{16a^4-16a^3p(2n+1)\pi+4p^2a^2(2n+1)^2\pi^2}{32a^3p}$$

que dividindo por $4a^2$, vem

$$\theta=\frac{4a^2-4ap(2n+1)\pi+p^2(2n+1)^2\pi^2}{8ap}\text{, ou ainda}$$

$$\theta=\frac{\left(2a-p(2n+1)\pi\right)^2}{8ap}.$$

Fórmula na qual n representa qualquer número inteiro positivo, e que serve para determinar os valores de θ a que correspondem pontos de contacto duplo da curva.

Para determinar os pontos de inflexão da espiral utiliza-se expressão da curvatura $K = \dfrac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, pois para haver inflexão a curvatura tem de se anular. Os pontos de inflexão devem, pois, satisfazer

$\rho^2 + 2\left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right) - \rho\left(\dfrac{d^2\rho}{d\theta^2}\right) = 0$, note-se que $\rho^2 + \rho'^2 \neq 0$.

Como $\dfrac{d\rho}{d\theta} = \dfrac{pa}{(\rho - a)}$ e $\dfrac{d^2\rho}{d\theta^2} = \dfrac{-pa\dfrac{d\rho}{d\theta}}{(\rho-a)^2} = \dfrac{-pa\dfrac{pa}{(p-a)}}{(\rho-a)^2} = \dfrac{-pa}{(\rho-a)^3}$

A equação que anula a curvatura é equivalente a

$\rho^2 + 2\dfrac{p^2a^2}{(\rho-a)^2} - \rho\dfrac{-pa}{(\rho-a)^3} = 0$,

ou

$$\rho^2(\rho-a)^3 + 2p^2a^2(\rho-a) + \rho p^2a^2 = 0$$

Desta equação combinada com a da curva, deduz-se os valores de ρ e θ, correspondentes aos pontos de inflexão procurados, a mesma equação mostra também que a curva há de ter, pelo menos, um ponto de inflexão real. Além disso, com $\rho > a$, todas as parcelas da última equação seriam positivos, logo não teria solução, o que permite concluir que os pontos de inflexão reais da curva se situam no interior da circunferência com centro na origem da coordenadas, e cujo raio é igual a a.

Tomando como posição inicial a do raio OA, a área descrita pelo raio vector é dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_0^\theta \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\theta \left(a \pm \sqrt{2pa\theta}\right)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\theta \left(a^2 \pm 2a\sqrt{2pa\theta} + 2pa\theta\right)d\theta$$

$$A=\frac{1}{2}\left[a^2\theta\pm\frac{2}{3p}\left(2pa\theta\right)^{\frac{3}{2}}+pa\theta^2\right]_0^{\theta}=\frac{1}{2}\left[a^2\theta\pm\frac{2}{3p}\left(2pa\theta\right)^{\frac{3}{2}}+pa\theta^2\right].$$

Daqui se deduz que a área A_1 compreendida entre arco OA e a sua corda é dada por

$$A_1=\frac{1}{2}\left[a^2\theta-\frac{2}{3p}\left(2pa\theta\right)^{\frac{3}{2}}+pa\theta^2\right]_0^{\frac{a}{2p}}.$$

Note-se que o arco corresponde à parte azul da figura, logo o sinal correspondente no integral é menos

$$A_1=\frac{1}{2}\left[a^2\frac{a}{2p}-\frac{2}{3p}\left(2pa\times\frac{a}{2p}\right)^{\frac{3}{2}}+ap\frac{a^2}{4p^2}\right]$$

$$A_1=\frac{1}{2}\left(\frac{a^3}{2p}-\frac{2a^3}{3p}+\frac{a^3}{4p}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{6a^3}{12p}-\frac{8a^3}{12p}+\frac{3a^3}{12p}\right)$$

$$A_1=\frac{1}{2}\frac{a^3}{12p}=\frac{a^3}{24p}.$$

Para calcular o comprimento do arco da espiral considerada, contando os arcos a partir do ponto A

$$s=\int_a^{\rho}\sqrt{\rho^2\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2+1}\,d\rho,$$

como,

$(\rho-a)^2=2pa\theta$, vem $2(\rho-a)=2pa\dfrac{d\theta}{d\rho}\Leftrightarrow\dfrac{d\theta}{d\rho}=\dfrac{2(\rho-a)}{2pa}$, que substituindo,

$$s=\int_a^{\rho}\sqrt{\rho^2\left(\frac{2(\rho-a)}{2pa}\right)^2+1}\,d\rho=\int_a^{\rho}\sqrt{\rho^2\frac{(\rho-a)^2}{p^2a^2}+1}\,d\rho=$$

$$s=\frac{1}{pa}\int_a^{\rho}\sqrt{\rho^2(\rho-a)^2+p^2a^2}\,d\rho$$

fórmula transformável em integrais elípticos.

5. Espiral Hiperbólica

Com o nome de espiral hiperbólica designa-se a curva de equação

$$\rho\theta = m$$

em que m representa uma constante.

Como ρ diminui e tende para 0, conforme θ aumenta e tende para ∞, vê-se que a curva dá um número infinito de voltas em torno da origem das coordenadas, da qual se aproxima indefinidamente, e que por tal motivo constitui um ponto asimptótico da mesma curva.

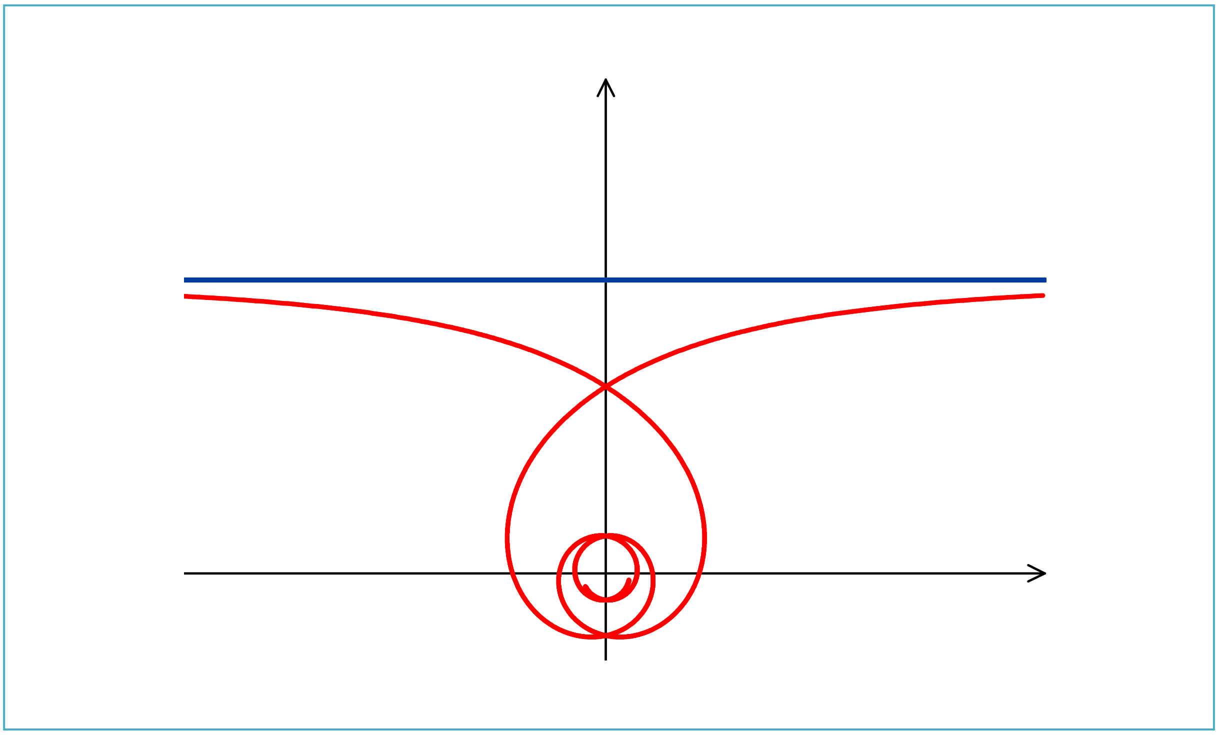

Figura 12- Espiral Hipérbólica

$m > 0$

Representando por x e y as coordenadas cartesianas da curva, tem-se que

$$y = \rho sen\theta = \frac{msen\theta}{\theta}.$$

De maneira que y tende para m, conforme θ se aproxima de zero. Logo a recta $y = m$ é assimptota da curva.

O ângulo v, formado pela tangente com o raio vector do ponto de contacto é dado por, $tgv = \frac{\rho}{\rho'}$ assim como, $\rho = \frac{m}{\theta}$, logo $\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{m}{\theta^2}$, vem

$$tgv = \frac{\rho}{-\frac{m}{\theta^2}} \Leftrightarrow -\frac{\rho\theta}{m} \text{ e como } \theta = \frac{m}{\rho},\ tgv = \frac{-\rho\frac{m^2}{\rho^2}}{m} = -\frac{m^2}{\rho m}$$

$$tgv = -\frac{m}{\rho}$$

A subtangente por ser dada por $St = \rho tgv$ vem

$$St = -\rho\frac{m}{\rho} = -m.$$

A subnormal em coordenadas polares obtém-se

$$Sn = \frac{\rho}{tgv} = \frac{\rho}{-\frac{m}{\rho}} = -\frac{\rho^2}{m}.$$

O comprimento da normal polar é dado pela fórmula

$$N^2 = \rho^2 + Sn^2,$$

logo

$$N^2 = \rho^2 + \left(-\frac{\rho^2}{m}\right)^2 \Leftrightarrow N^2 = \rho^2 + \frac{\rho^4}{m^2} \Leftrightarrow N^2 = \frac{\rho^2 m^2 + \rho^4}{m^2}$$

$$N = \frac{\rho}{m}\sqrt{m^2 + \rho^2}.$$

O comprimento da tangente polar é dado pela fórmula

$$T^2 = \rho^2 + St^2 \Leftrightarrow T^2 = \rho^2 + (-m)^2$$

$$T = \sqrt{\rho^2 + m^2}.$$

Para determinar o raio de curvatura, calculamos $\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{m}{\theta^2} = \frac{-m}{\frac{m^2}{\rho^2}} = -\frac{\rho^2}{m}$ e

$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \frac{2m\theta}{\theta^4} = \frac{2m}{\theta^3}$ que conjugando com a equação da curva vem $\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \frac{2m}{\frac{m^3}{\rho^3}} = \frac{2\rho^3}{m^2}$.

Substituindo na expressão $R = \frac{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho' - \rho\rho''}$ resulta

$$R = \frac{\left(\left(-\frac{\rho^2}{m}\right)^2 + \rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\left(-\frac{\rho^2}{m}\right) - \rho\frac{2\rho^3}{m^2}} = \frac{\left(\frac{\rho^4}{m^2} + \rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + \frac{2\rho^4}{m^2} - \frac{2\rho^4}{m^2}} = \frac{\left(\frac{\rho^4 + \rho^2 m^2}{m^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2} =$$

$$R = \frac{\left[\frac{\rho^2\left(\rho^2 + m^2\right)}{m^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\rho^2} = \frac{\frac{\rho^3}{m^3}\left(\rho^2 + m^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2} = \frac{\rho^3\left(\rho^2 + m^2\right)^{\frac{3}{2}}}{m^3\rho^2} =$$

$$R = \frac{\rho\left(\rho^2 + m^2\right)^{\frac{3}{2}}}{m^3}.$$

Da qual se mostra que a curva não tem pontos de inflexão, visto que $m^3 \neq 0$.

É imediata a verificação que

$$R = \frac{N^3}{\rho^2} = \frac{\frac{\rho^3}{m^3}\left(\sqrt{m^2 + \rho^2}\right)^3}{\rho^2} = \frac{\rho}{m^3}\left(m^2 + \rho^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$R = -\frac{N^3}{mSt} = \frac{N^3}{SnSt}.$$ **IX**

IX No Tratado das Curvas Especiais Notáveis de Gomes Teixeira $R = \frac{N^3}{mSt} = \frac{N^3}{SnSt}$

A área descrita pelo raio vector quando este se move desde a posição correspondente ao ângulo θ_0 até ao correspondente θ_1 determina-se pela fórmula

$$A=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\rho^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{m^2}{\theta^2}d\theta=-\frac{1}{2}m\theta^{-1}\Big]_{\theta_0}^{\theta_1}=\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1}\right)$$

logo,

$$A=\frac{1}{2}m\left(\rho_0-\rho_1\right)$$

que é igual à área de um triângulo de fácil construção.

O comprimento do arco da curva compreendido entre os pontos $\left(\rho_0,\theta_0\right)$ e $\left(\rho_1,\theta_1\right)$ é determinado pela fórmula:

$$s=\int_{\rho_0}^{\rho_1}\sqrt{\rho^2\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2+1}\,d\rho\,.$$

E, como $\dfrac{d\theta}{d\rho}=-\dfrac{m}{\rho^2}$, vem

$$s=\int_{\rho_0}^{\rho_1}\sqrt{\rho^2\left(-\frac{m}{\rho^2}\right)^2+1}\,d\rho=\int_{\rho_0}^{\rho_1}\sqrt{\rho^2\frac{m^2}{\rho^4}+1}\,d\rho=\int_{\rho_0}^{\rho_1}\sqrt{\frac{m^2+\rho^2}{\rho^2}}d\rho=$$

$$=\int_{\rho_0}^{\rho_1}\sqrt{\rho^{-1}\left(\rho^2+m^2\right)^{\frac{1}{2}}}\,d\rho\,.$$

Vamos começar por resolver $\int\sqrt{\rho^{-1}\left(\rho^2+m^2\right)^{\frac{1}{2}}}\,d\rho$, fazendo a substituição

$\rho=mtgt$.

Como $d\rho=m\sec^2 tdt$, o integral fica na forma

$$\int\frac{1}{mtgt}\left(m^2+m^2tg^2t\right)^{\frac{1}{2}}m\sec^2 tdt=$$

$$=\int\frac{\cos t}{msent}m\sec t\times m\sec^2 tdt=\int\frac{m\sec^2 t}{sent}dt=\int m\frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{sent}dt=\int m\frac{dt}{\cos^2 t.sent}\,.$$

Agora faz-se nova substituição, a saber,

$$tg\frac{t}{2}=z\,.$$

Como $\dfrac{sen^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}}=z^2\Leftrightarrow\dfrac{\frac{1-\cos t}{2}}{\frac{1+\cos t}{2}}=z^2\Leftrightarrow\cos t=\dfrac{1-z^2}{1+z^2}$.

Da equação $sen^2t+\cos^2 t=1$, resulta que,

$$sen^2t=1-\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)^2\Leftrightarrow sen^2t=1-\frac{1-2z^2+z^4}{1+2z^2+z^4}\Leftrightarrow sen^2t=\frac{4z^2}{\left(1+z^2\right)^2}$$

e que $sent=\dfrac{2z}{1+z^2}$.

Derivando esta última vem, $\dfrac{2\left(1+z^2\right)-2z\left(2z\right)}{\left(1+z^2\right)^2}dz=\cos t\,dt$

$\dfrac{\left(2-2z^2\right)}{\left(1+z^2\right)^2}dz=\cos t\,dt$, e como $\cos t=\dfrac{1-z^2}{1+z^2}$, vem, $\dfrac{2-2z^2}{\left(1+z^2\right)^2}dz=\dfrac{1-z^2}{1+z^2}dt$

$$dt=\frac{\left(2-2z^2\right)\left(1+z^2\right)}{\left(1+z^2\right)^2\left(1-z^2\right)}dz\Leftrightarrow dt=\frac{2}{1+z^2}dz\,.$$

Podemos agora efectivar a substituição referida, ficando o integral na forma

$$m\int\frac{1}{\frac{\left(1-z^2\right)^2}{\left(1+z^2\right)^2}\cdot\frac{2z}{1+z^2}}\times\frac{2}{1+z^2}dz=m\int\frac{\left(1+z^2\right)^2}{z\left(1-z\right)^2\left(1+z\right)^2}dz$$

A decomposição $\dfrac{a}{z}+\dfrac{b}{\left(1-z\right)^2}+\dfrac{c}{1-z}+\dfrac{d}{1+z}+\dfrac{e}{\left(1+z\right)^2}=\dfrac{\left(1+z^2\right)^2}{z\left(1-z\right)^2\left(1+z\right)^2}$, onde a, b e c, d e e devem satisfazer

$$a\left(1-2z^2+z^4\right)+bz\left(1+2z+z^2\right)+c\left(z-z^2\right)\left(1+2z+z^2\right)+dz\left(1+z\right)\left(1-2z+z^2\right)+$$
$$+ez\left(1-2z+z^2\right)=1+2z^2+z^4,$$

ou seja, o sistema

$$\begin{cases}1=a-c+d\\0=b-c-d+e\\2=-2a+2b+c-d-2e\\0=b+c+d+e\\1=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=c\\0=b-2c+e\\2=-2+2b-2e\\0=b+2c+e\\a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\d=c\\b=2+e\\0=2+e-2c+e\\0=2+e+2c+e\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=0\\d=0\\e=-1\end{cases}.$$

Voltando ao último integral, ele fica na forma

$$m\int\left[\frac{1}{z}+\frac{1}{(1-z)^2}-\frac{1}{(1+z)^2}\right]dz=m\left(\ln|z|+\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1+z}\right)+c.$$

Como $tg\,\frac{t}{2}=z$, é igual a

$$m\left[\ln tg\,\frac{t}{2}+\frac{1}{1-tg\,\frac{t}{2}}+\frac{1}{1+tg\,\frac{t}{2}}\right]+c.$$

Antes de fazer a última substituição, note-se que $tg^2\,\frac{t}{2}=\frac{sen^2\,\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}}=\frac{1-\cos t}{1+\cos t}$ e daí que a última expressão do integral se pode escrever na forma seguinte

$$m\left[\ln\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}+\frac{1}{1-\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}}+\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}}\right].$$

A substituição final é $tgt=\frac{\rho}{m}$, pelo que

$$tg^2t=\frac{\rho^2}{m^2}\Leftrightarrow\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}=\frac{\rho^2}{m^2}\Leftrightarrow\cos^2 t=\frac{m^2}{m^2+\rho^2}\Leftrightarrow\cos t=\frac{m}{\sqrt{m^2+\rho^2}}.$$

Note-se que na substituição $tgt=\frac{\rho}{m},t\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, onde o cosseno é positivo.

O integral final é

$$m\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1-\frac{m}{\sqrt{m^2+\rho^2}}}{1+\frac{m}{\sqrt{m^2+\rho^2}}}+\frac{1}{1-\sqrt{\frac{1-\frac{m}{\sqrt{m^2+\rho^2}}}{1+\frac{m}{\sqrt{m^2+\rho^2}}}}}+\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1-\frac{m}{\sqrt{m^2+\rho^2}}}{1+\frac{m}{\sqrt{m^2+\rho^2}}}}}\right]=$$

$$=m\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\frac{\sqrt{m^2+\rho^2}-m}{\sqrt{m^2+\rho^2}}}{\frac{\sqrt{m^2+\rho^2}+m}{\sqrt{m^2+\rho^2}}}+\frac{1}{1-\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{m^2+\rho^2}-m}{\sqrt{m^2+\rho^2}}}{\frac{\sqrt{m^2+\rho^2}+m}{\sqrt{m^2+\rho^2}}}}}+\frac{1}{1+\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{m^2+\rho^2}-m}{\sqrt{m^2+\rho^2}}}{\frac{\sqrt{m^2+\rho^2}+m}{\sqrt{m^2+\rho^2}}}}}\right]=$$

$$=m\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{m^2+\rho^2}-m}{\sqrt{m^2+\rho^2}+m}+\frac{1}{1-\sqrt{\frac{\sqrt{m^2+\rho^2}-m}{\sqrt{m^2+\rho^2}+m}}}+\frac{1}{1+\sqrt{\frac{\sqrt{m^2+\rho^2}-m}{\sqrt{m^2+\rho^2}+m}}}\right]=$$

$$=m\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{m^2+\rho^2}-m}{\sqrt{m^2+\rho^2}+m}+\frac{1+\sqrt{\frac{\sqrt{m^2+\rho^2}-m}{\sqrt{m^2+\rho^2}+m}}+1-\sqrt{\frac{\sqrt{m^2+\rho^2}-m}{\sqrt{m^2+\rho^2}+m}}}{\left(1-\sqrt{\frac{\sqrt{m^2+\rho^2}-m}{\sqrt{m^2+\rho^2}+m}}\right)\left(1+\sqrt{\frac{\sqrt{m^2+\rho^2}-m}{\sqrt{m^2+\rho^2}+m}}\right)}\right]=$$

$$=m\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{m^2+\rho^2}-m}{\sqrt{m^2+\rho^2}+m}+\frac{2}{1-\frac{\sqrt{m^2+\rho^2}-m}{\sqrt{m^2+\rho^2}+m}}\right]=$$

L

$$= m\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{m^2+\rho^2}-m}{\sqrt{m^2+\rho^2}+m} + \frac{2}{\dfrac{\sqrt{m^2+\rho^2}+m-\sqrt{m^2+\rho^2}+m}{\sqrt{m^2+\rho^2}+m}}\right] =$$

$$= m\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{m^2+\rho^2}-m}{\sqrt{m^2+\rho^2}+m} + \frac{\sqrt{m^2+\rho^2}+m}{m}\right].$$

Todo este cálculo foi para obter s, que é então,

$$\frac{m}{2}\log\frac{\sqrt{m^2+\rho_1^2}-m}{\sqrt{m^2+\rho_1^2+m}} + \sqrt{\rho_1^2+m^2} - \frac{m}{2}\log\frac{\sqrt{m^2+\rho_1^2}-m}{\sqrt{m^2+\rho_1^2+m}} - \sqrt{\rho_1^2+m^2}\ ,$$

representando por T_0 e T_1 o comprimento das tangentes à curva nos pontos considerados

$$s = T_1 - T_0 + \frac{m}{2}\log\frac{(T_1-m)(T_0+m)}{(T_1+m)(T_0-m)}.$$

6. LITUUS

O lituus é uma curva espiral que tem por equação, em coordenadas polares, a que se segue:

$$\rho^2\theta = a^2$$

Uma primeira propriedade fácil de verificar é a seguinte: ao variar de posição o ponto P, a área do sector circular que tem por centro a origem O das coordenadas e que se encontra compreendida entre o eixo polar Ox e o raio vector $O\rho$, permanece constante.

$$\frac{\theta_1\rho_1^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\frac{\theta_2\rho_2^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

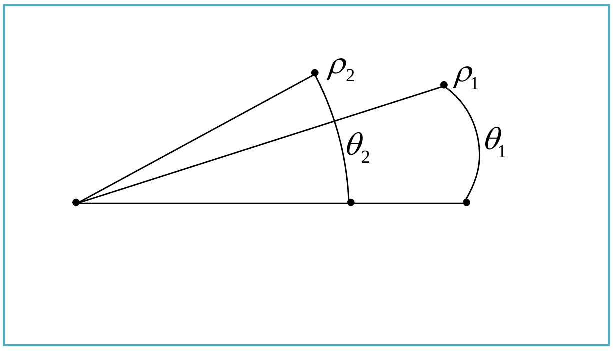

Figura 13

A equação ilustra que, no ramo onde ρ é positivo, quando aumenta θ, o ponto gerador da curva descreve um número infinito de voltas em torno de O, aproximando-se indefinidamente dele, sem nunca o alcançar. Quando, pelo contrário, θ tende para 0, o ponto gerador afasta-se indefinidamente do eixo das ordenadas, aproximando-se ao mesmo tempo do eixo das abcissas, que é assimptota da curva. Nos pontos $A, B, C, D, E, \ldots$, onde θ é sucessivamente igual a $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots$, ρ adquire estes outros valores, correspondentes aos de θ:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad OA = a\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$
$$\theta = \pi \quad OB = a\sqrt{\frac{2}{2\pi}},$$
$$\theta = \frac{3\pi}{2} \, OC = a\sqrt{\frac{2}{3\pi}}, \ldots$$

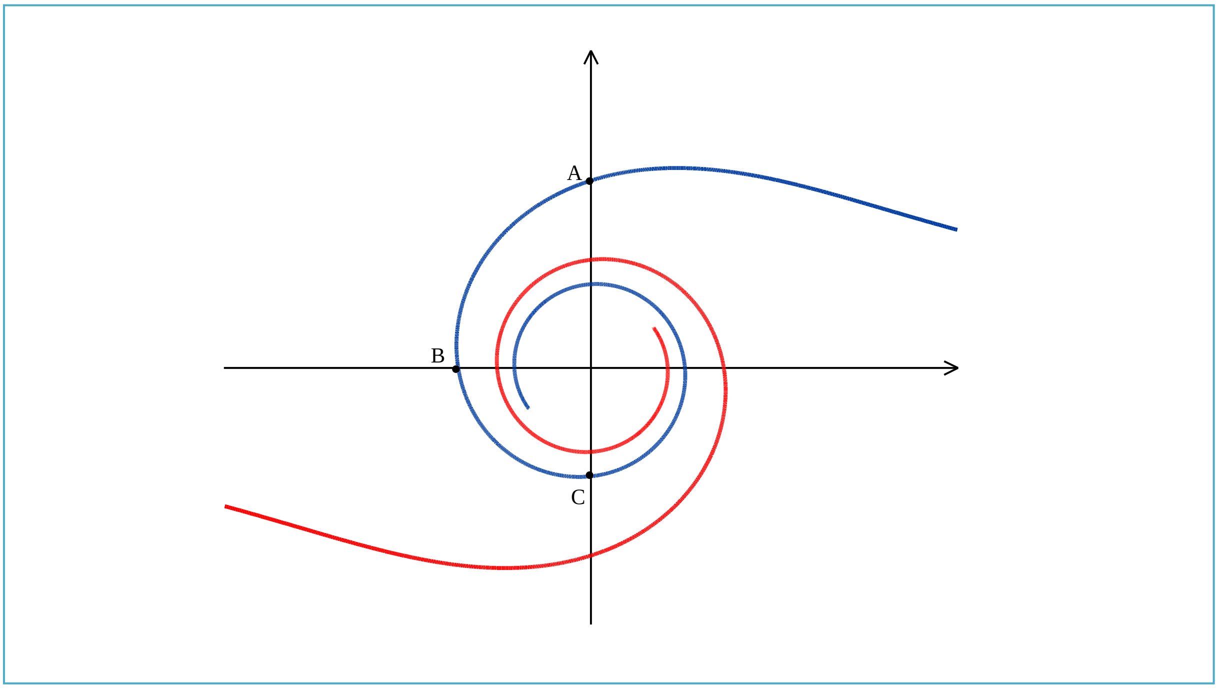

Figura 14: Lituus

O ângulo v da tangente à curva com o raio vector é $tgv = \frac{\rho}{\rho'}$. Derivando a equação da curva vem $\frac{d\rho}{d\theta} 2\rho\theta + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{\rho}{2\theta}$, que conjugando com $\rho^2\theta = a^2 \Leftrightarrow \theta = \frac{a^2}{\rho^2}$ fica $\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{\rho^3}{2a^2}$ que substituindo,

$$tgv = \frac{\rho}{-\frac{\rho^3}{2a^2}} \Leftrightarrow tgv = -\frac{2a^2}{\rho^2}.$$

A subtangente da curva no ponto (ρ, θ) é $St = \rho \times tgv$,

$$St = \rho \times \left(-\frac{2a^2}{\rho^2}\right) \Leftrightarrow St = -\frac{2a^2}{\rho}.$$

Para determinar o raio de curvatura derivada-se, em ordem a θ, $\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{\rho^3}{2a^2}$ que vem,

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = -\frac{-3\rho^2 \frac{d\rho}{d\theta} \times 2a^2}{4a^4} \Leftrightarrow \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = -\frac{-3\rho^2 \times -\frac{\rho^3}{2a^2} \times 2a^2}{4a^4} = \frac{3\rho^5}{4a^4}.$$

Substituindo em $R = \frac{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho' - \rho\rho''}$ dá

$$R = \frac{\left(\rho^2 + \frac{\rho^6}{4a^4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\left(\frac{\rho^6}{4a^4}\right) - \rho \times \frac{3\rho^5}{4a^4}} = \frac{\left(\frac{4a^4\rho^2 + \rho^6}{4a^4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\frac{\rho^6}{4a^4} - \frac{3\rho^6}{4a^4}} = \frac{\left(\rho^2\left(\frac{4a^4 + \rho^4}{4a^4}\right)\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 - \frac{\rho^6}{4a^4}}$$

$$R = \frac{\rho^3 \frac{\left(4a^4 + \rho^4\right)^{\frac{3}{2}}}{8a^6}}{\frac{\rho^2\left(4a^4 - \rho^4\right)}{4a^4}} = \frac{4a^4\rho^3\left(4a^4 + \rho^4\right)^{\frac{3}{2}}}{8a^6\rho^2\left(4a^4 - \rho^4\right)}$$

$$R = \frac{\rho\left(4a^4 + \rho^4\right)^{\frac{3}{2}}}{2a^2\left(4a^4 - \rho^4\right)}.$$

Os pontos de inflexão da curva encontram-se mediante a análise da igualdade $2a^2\left(4a^4 - \rho^4\right) = 0$, visto haver inflexão quando o raio de curvatura se anula,

$\rho^4 = 4a^4 \Leftrightarrow \rho = \pm\sqrt{2}a$, a curva possui um ponto de inflexão em cada ramo da curva definidos pelas coordenadas $\theta = \frac{1}{2}$ e $\rho = \pm a\sqrt{2}$. Note-se que $4a^4 + \rho^4 \neq 0$.

A área A, descrita pelo raio vector quando θ varia desde θ_0 até θ_1, é expressa por

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{a^2}{\theta} d\theta = \frac{1}{2}a^2 log\theta\Big]_{\theta_0}^{\theta_1} = \frac{1}{2}a^2\left(log\theta_1 -\right)log\theta_0$$

logo,

$$A = \frac{1}{2}a^2 \log\frac{\theta_1}{\theta_0}.$$

O comprimento do arco é

$$s = \int\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}d\theta = \int\sqrt{\rho^2 + \left(-\frac{\rho}{2\theta}\right)^2}d\theta = \int\sqrt{\rho^2 + \frac{\rho^2}{4\theta^2}}d\theta =$$

$$\int\sqrt{\frac{a^2}{4\theta^3} + \frac{a^2}{\theta}}d\theta = \int\sqrt{\frac{a^2}{\theta}\left(\frac{1}{4\theta^2} + 1\right)}d\theta = a\int\theta^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{4}\theta^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} d\theta.$$

Este integral não é resolúvel por meio de funções elementares.

Reduzindo o integral anterior à forma

$$a\int\frac{\left(1 + \frac{1}{4\theta^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\theta}}d\theta = a\int\frac{\left(1 + \frac{1}{4\theta^2}\right)}{\theta^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{4\theta^2}\right)^{\frac{1}{2}}}d\theta = a\int\frac{\frac{1+4\theta^2}{4\theta^2}}{\theta^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1+4\theta^2}{4\theta^2}\right)^{\frac{1}{2}}}d\theta$$

$$a\int\frac{\frac{1+4\theta^2}{4\theta^2}}{\theta^{\frac{1}{2}}\frac{\left(1+4\theta^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2\theta}}d\theta = a\int\frac{2\theta\left(1+4\theta^2\right)}{4\theta^2\sqrt{\theta\left(1+4\theta^2\right)}}d\theta = \frac{a}{2}\int\frac{\left(1+4\theta^2\right)}{\theta\sqrt{\theta\left(1+4\theta^2\right)}}d\theta.$$

Tendo presente a igualdade,

$$\int\frac{4\theta^2+1}{\theta\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}d\theta = \int\frac{\sqrt{4\theta^2+1}}{\theta\sqrt{\theta}}d\theta = \int\sqrt{4\theta^2+1}\theta^{-\frac{3}{2}}d\theta,$$

que passaremos a demonstrar.

Integrando por partes, fica

$$\frac{\theta^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\sqrt{4\theta^2+1}-\int\frac{\theta^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\times\frac{1}{2}\left(4\theta^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}8\theta d\theta=\frac{-2\sqrt{4\theta^2+1}}{\sqrt{\theta}}-\int\frac{-2}{\sqrt{\theta}}\times\frac{8\theta}{2\sqrt{4\theta^2+1}}d\theta\,.$$

$$\int\frac{4\theta^2+1}{\theta\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}d\theta=\frac{-2\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}{\theta}+4\int\frac{2\theta}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}d\theta\ .\qquad \text{X}$$

Deduz-se, em conclusão, que

$$s=\frac{a}{2}\left[\frac{-2\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}{\theta}+4\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{2\theta}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}d\theta\right]=\frac{a}{2}\left[\frac{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}{\theta}+4\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{2\theta}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}d\theta\right]_{\theta_0}^{\theta_1}$$

$$s=a\left[\left[\frac{\sqrt{\theta_0\left(4\theta_0^2+1\right)}}{\theta_0}-\frac{\sqrt{\theta_1\left(4\theta_1^2+1\right)}}{\theta_1}+4\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{2\theta}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}d\theta\right]\right].$$

Portanto, s depende de um integral elíptico de segunda espécie, reduzido à forma adoptada por WEIERSTRASS.

7. Espiral Logarítmica

A denominada espiral logarítmica é a curva, secante a todas a todas as semi-rectas planas que partem de um certo ponto ou origem, formando com elas um ângulo constante.

Tomando como origem das coordenadas o ponto origem das semi-rectas e representando por v, o ângulo formado pelo raio vector que passa por um ponto da curva com a tangente à curva no mesmo ponto, sabe-se

$$tgv=\frac{\rho}{\rho'}\Leftrightarrow tgv=\frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\theta}}\Leftrightarrow tgv=\rho\frac{d\theta}{d\rho}\,.$$

X No Tratado das Curvas Especiais Notáveis de Gomes Teixeira

$$\int\frac{4\theta^2+1}{\theta\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}d\theta=\frac{-2\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}{\theta}+4\int\frac{\theta}{\sqrt{\theta\left(4\theta^2+1\right)}}d\theta$$

A equação diferencial das curvas às quais corresponde um valor constante de v é, pois

$\rho \dfrac{d\theta}{d\rho} = \dfrac{1}{c}$, onde c é uma constante não nula.

A equação de variáveis separáveis, isto é, pode ser escrita na forma

$$\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1}{c\rho} \Leftrightarrow c d\theta = \frac{d\rho}{\rho}.$$

Integrando-a vem,

$$c\theta + k = \ln\rho \Leftrightarrow e^{k+c\theta} = \rho \Leftrightarrow \rho = e^{k} \times e^{c\theta}$$, então a equação geral da espiral é

$$\rho = Ke^{c\theta}, K \in \Re^{+}.$$

Por meio desta equação vê-se que a parte da curva que corresponde aos valores positivos de θ (de 0 até ∞), parte do ponto $A = (0, K)$ e dá um número indeterminado de voltas em torno da origem, desviando-se cada vez mais desta; e a que corresponde os valores negativos de θ (de 0 até $-\infty$), parte do mesmo ponto, e descreve também um infinito número de voltas em torno da origem, aproximando-se desta continuamente sem nunca a alcançar.

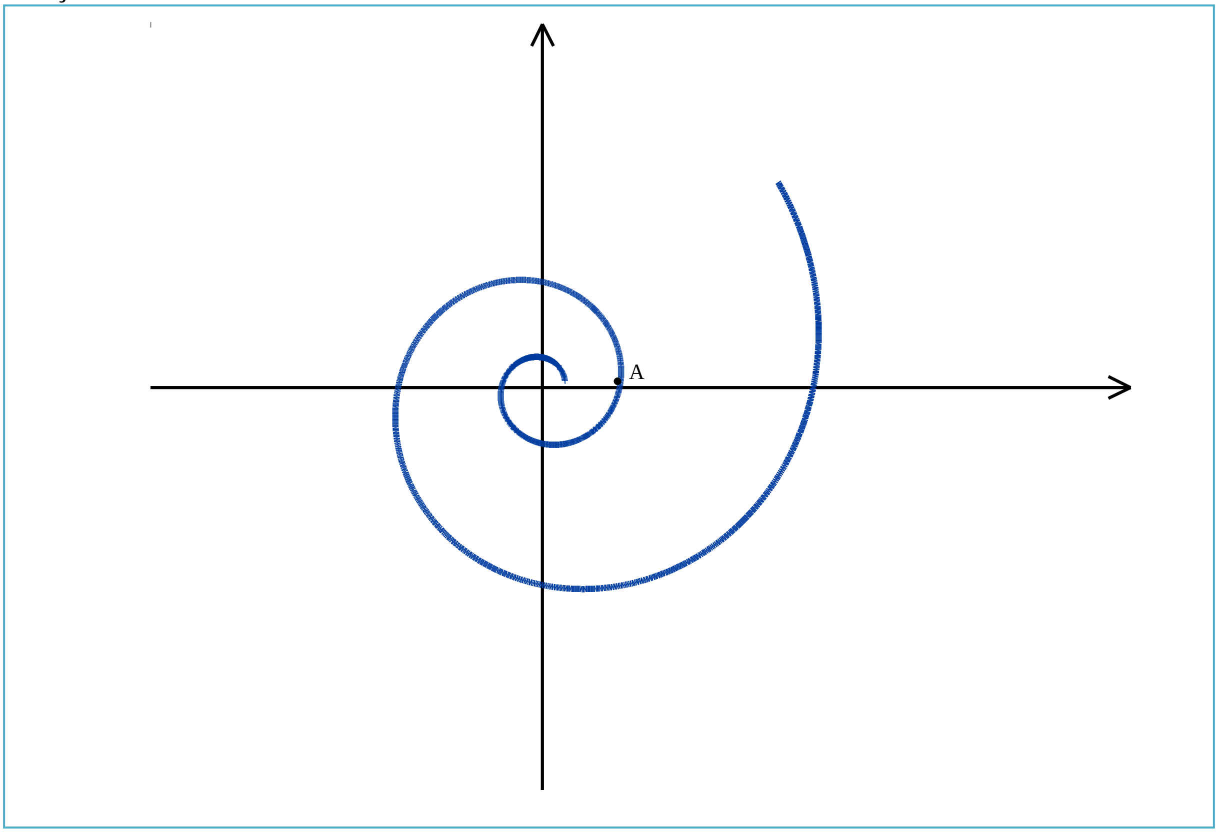

Figura 15-Espiral Logarítmica

$c > 0$ e $K > 0$

A subnormal é dada por $Sn = \frac{\rho}{tgv}$. Derivando a equação da espiral obtêm-se $1 = Kce^{c\theta} \frac{d\theta}{d\rho} \Leftrightarrow \frac{d\rho}{d\theta} = Kce^{c\theta}$, logo, $tgv = \frac{\rho}{Kce^{c\theta}}$, que substituindo

$$Sn = \frac{\rho}{\frac{\rho}{Kce^{c\theta}}} = Kce^{c\theta} = c\rho .$$

A da subtangente é $St = \rho tgv$, que substituindo de novo,

$$St = \rho^2 \frac{1}{Kce^{c\theta}} = \rho^2 \frac{1}{c\rho} = \frac{\rho}{c} .$$

O comprimento da normal é $N^2 = \rho^2 + Sn^2 \Leftrightarrow N^2 = \rho^2 + (c\rho)^2$, ou seja,

$$N = \sqrt{c^2\rho^2 + \rho^2} = \rho\sqrt{c^2 + 1} .$$

O raio de curvatura em coordenadas polares é dado por

$$R = \frac{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$$

que, conjugando com as equações $\frac{d\rho}{d\theta} = Kce^{c\theta}$ e $\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = Kc^2e^{c\theta}$, permite obter o raio de curvatura da espiral

$$R = \frac{\left(\rho^2 + \left(Kce^{c\theta}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\left(Kce^{c\theta}\right)^2 - \rho Kc^2e^{c\theta}} = \frac{\left(\rho^2 + K^2c^2e^{2c\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2K^2c^2e^{2c\theta} - \rho Kc^2e^{c\theta}} = \frac{\left(\rho^2 + c^2\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2c^2\rho^2 - c^2\rho^2} =$$

$$= \frac{\rho^3\left(1 + c^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2\left(1 + c^2\right)} = \rho\sqrt{1 + c^2} = N .$$

De salientar que Sn, St, N e R são proporcionais a ρ.

Traçando, pois, a normal à curva no ponto $P = (\rho, \theta)$, e prolongando-a até intersectar em N a recta ON perpendicular a OP, obtêm-se o centro de curvatura N, correspondente ao ponto P.

È assim fácil obter o valor das coordenadas θ_1 e ρ_1 do ponto N. Temos, com efeito, por ON ser a subnormal,

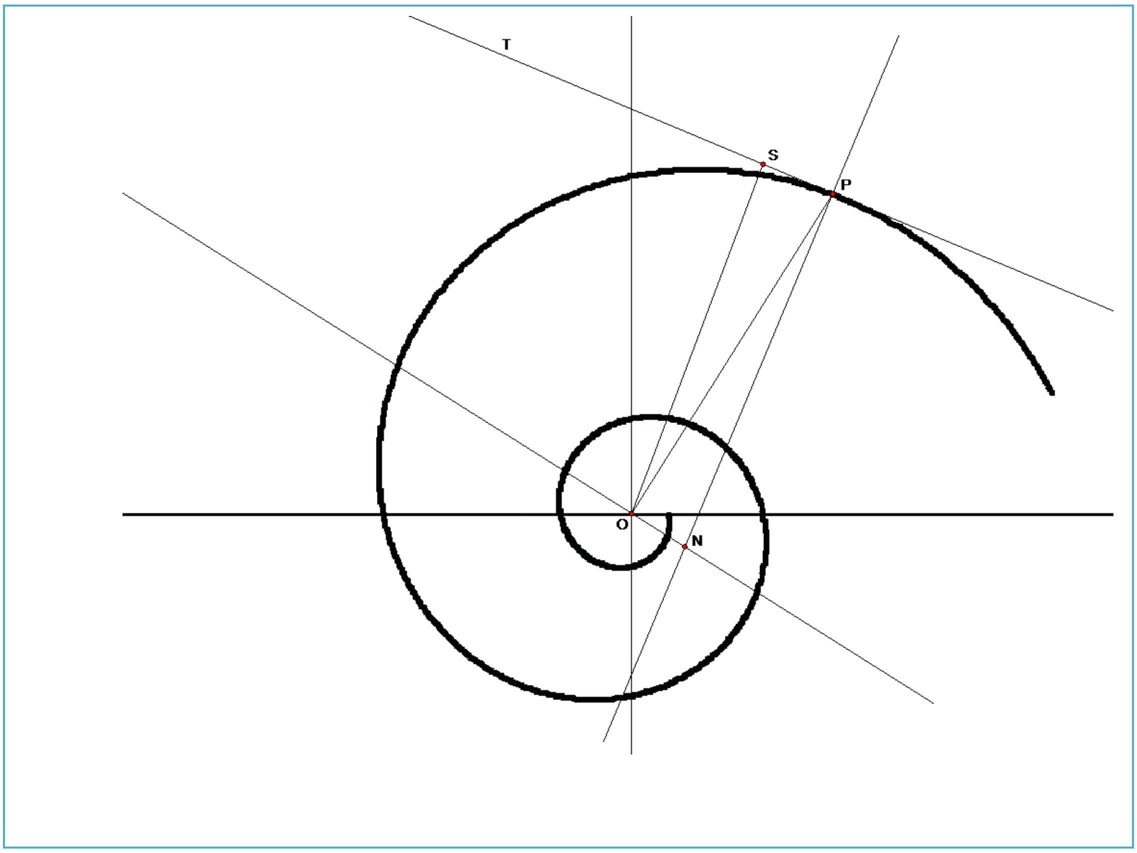

Figura 16

$$\rho_1 = ON = c\rho = cKe^{c\theta}\text{, e } \theta_1 = NOX = \theta \pm \frac{\pi}{2}.$$ [XI]

Eliminando θ destas equações, tem-se que

$\rho_1 = cKe^{c\left(\theta_1 \pm \frac{\pi}{2}\right)} = Ke^{c\theta_1 \pm \frac{\pi}{2} + \ln c} = Ke^{c\theta_1}.e^{\pm \frac{\pi}{2} + \ln c} = Ke^{c\theta_1}K_1$, fazendo agora $K \times K_1 = K'$, vem

$$\rho_1 = K' e^{c\theta_1}.$$

Logo a evoluta [XII] da espiral logarítmica é outra espiral logarítmica.

XI No Tratado das Curvas Especiais Notáveis de Gomes Teixeira $\theta_1 = NOX = \theta + \frac{\pi}{2}$.

XII Evoluta- lugar dos centros de curvatura de uma dada curva.

Se representarmos por n qualquer número inteiro, $\frac{\pi}{2}-\frac{\ln c}{c}=2n\pi$ a evoluta da espiral considerada coincidirá com a própria curva.

Se OS representa a perpendicular, traçada desde a origem até PT, tangente à espiral no ponto P, o lugar geométrico de S, conforme P varia, será a curva pedal [XIII] da curva relativamente ao ponto O.

Representando por v o ângulo formado pelo o raio vector no ponto P com PS tem-se $senv=\frac{OS}{OP}\Leftrightarrow OS=OPsenv$ e $tgv=\frac{1}{c}$ e como

$$\frac{1}{\cos^2 v}-1=tg^2\alpha\Leftrightarrow\frac{1}{1-sen^2v}=\frac{1}{c^2}+1\Leftrightarrow senv=\sqrt{\frac{1}{c^2+1}}$$ resulta que

$$OS=\rho\sqrt{\frac{1}{c^2+1}}.$$

O ângulo POS é igual a OPN (ângulos alternos internos num sistema de duas paralelos cortadas por uma secante), e, portanto é igual a $\frac{\pi}{2}-v$, logo constante, e pode designar-se por a.

As coordenadas de S são $\rho_s=\frac{\rho}{\sqrt{c^2+1}}$ e $\theta_s=\theta\pm a$. [XIV]

Equações que combinadas com a da curva origina a seguinte equação para a curva pedal

$$\rho_s=\frac{K}{\sqrt{c^2+1}}e^{c(\theta_s\mp a)} \quad ,$$

conclui-se assim que a curva pedal da espiral logarítmica é outra espiral logarítmica.

XIII Curva pedal-Lugar geométrico dos pés das perpendiculares baixadas de um ponto fixo sobre as tangentes a uma curva.

XIV No Tratado das Curvas Especiais Notáveis de Gomes Teixeira $\theta_s=\theta-a$

A área descrita pelo vector da espiral logarítmica, quando θ varia desde θ_0 até θ_1 tem expressão

$$A=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\rho^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\left(Ke^{c\theta}\right)^2 d\theta=\frac{1}{2}\times\frac{K}{2c}\int_{\theta_0}^{\theta_1}e^{2c\theta}d\theta=$$

$$\left.\frac{K}{4c}e^{2c\theta}\right]_{\theta_0}^{\theta_1}=\frac{1}{4c}\left(\rho_1^2-\rho_0^2\right).$$

O comprimento do arco é

$$s=\int_{\rho_0}^{\rho_1}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2}d\rho=\int_{\rho_0}^{\rho_1}\sqrt{K^2e^{2c\theta}\times\frac{1}{K^2c^{2c\theta}}+1}d\rho=\int_{\rho_0}^{\rho}\sqrt{\frac{1}{c^2}+1}d\rho=$$

$$\left.\frac{\sqrt{1+c^2}}{c}\rho\right]_{\rho_0}^{\rho_1}=\frac{\sqrt{1+c^2}}{c}\left(\rho_1-\rho_0\right).$$

8. Espiral de Poinsot

Dá-se o nome da espiral de Poinsot à curva de equação definida pela equação

$$\rho=\frac{2a}{e^{m\theta}+e^{-m\theta}}.$$

Note-se que, neste caso tem-se $\rho=a$, quando $\theta=0$ e $\rho=0$, quando $\theta\to\infty$. Além disso, como $\frac{d\rho}{d\theta}=\frac{-2a\left(me^{m\theta}-me^{-m\theta}\right)}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}=\frac{-2am\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}$, e esta por ser negativa quando θ é positivo e diferente de zero vê-se que a parte, representada a azul na figura, é gerada por um ponto que, partindo de $A=(a,0)$ dá um número infinito de voltas em torno da origem, no sentido positivo, aproximando-se indefinidamente deste ponto. E como a equação da curva não se altera quando se muda θ para $-\theta$, conclui-se que a outra parte da curva, representada a vermelho, é simétrica à primeira relativamente ao eixo OA.

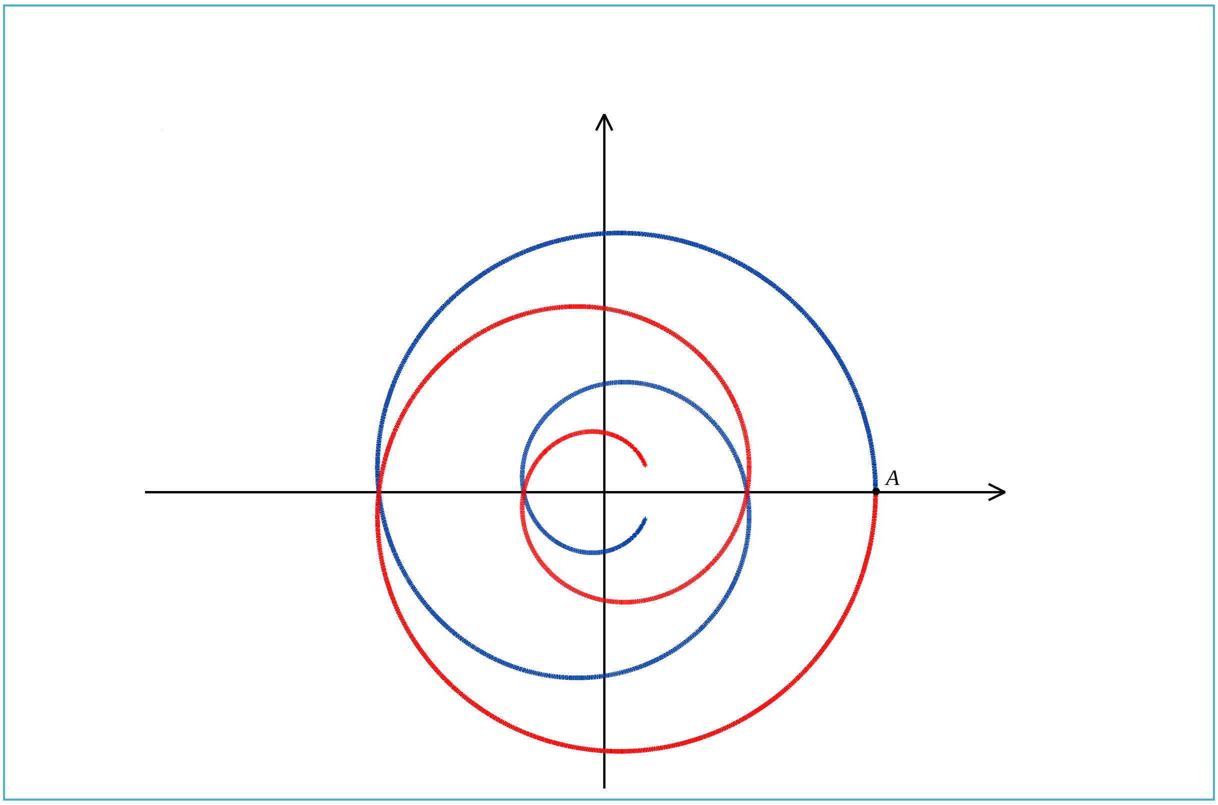

Figura 17-Espiral de Poinsot

$a > 0$ e $m > 0$

O ângulo v, formado pela tangente à curva com o raio vector no ponto de contacto, é $tgV = \frac{\rho}{\rho'}$, substituindo $\frac{d\rho}{d\theta}$, já calculado vem

$$tgv = \frac{\frac{2a}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)}}{\frac{-2am\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)}} = \frac{2a\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)}{-2am\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)} = \frac{-2a}{m\rho\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)}.$$

Podemos concluir que a tangente à curva no ponto A é perpendicular a OA, visto que neste ponto $tgv = \infty$.

A subnormal é dada por $Sn = \frac{\rho}{tgv}$, que substituindo tgv, fica

$$Sn = \frac{m\rho^2\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)}{-2a}.$$

O comprimento da normal é $N^2 = \rho^2 + Sn^2$, que conjugando com as equações da curva e de Sn, fica

$$N^2=\rho^2+\frac{m^2\rho^4\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)^2}{4a^2}\Leftrightarrow\frac{4\rho^2a^2+m^2\rho^4\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)^2}{4a^2}=$$

$$\frac{\rho^2}{a^2}\left(a^2-\frac{m^2}{4}\frac{4a^2}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)^2\right)=\frac{\rho^2}{a^2}\left(a^2+\frac{a^2m^2}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}\left(e^{2m\theta}-2e^{m\theta}e^{-m\theta}+e^{-2m\theta}\right)\right)$$

$$\frac{\rho^2}{a^2}\left(a^2+\frac{m^2a^2\left(e^{2m\theta}+e^{-2m\theta}\right)}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}+\frac{m^2a^2\left(-2e^{m\theta}e^{-m\theta}\right)}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{\rho^2}{a^2}\left(a^2+\frac{a^2m^2\left(e^{2m\theta}+e^{-2m\theta}+2e^{m\theta}e^{-m\theta}\right)}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}-\frac{2a^2m^2e^{m\theta}e^{-m\theta}}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}-\frac{2a^2m^2e^{m\theta}e^{-m\theta}}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{\rho^2}{a^2}\left(a^2+a^2m^2-\frac{4a^2m^2}{2\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}-\frac{4a^2m^2}{2\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{\rho^2}{a^2}\left(a^2+a^2m^2-\frac{\rho^2m^2}{2}-\frac{\rho^2m^2}{2}\right)=\frac{\rho^2}{a^2}\left(a^2+a^2m^2-\rho^2m^2\right).$$

Então

$$N=\frac{\rho}{a}\sqrt{a^2\left(1+m^2\right)-m^2\rho^2}\,.$$

Para determinar a expressão do raio de curvatura da espiral de Poinsot é necessário determinar $\frac{d^2\rho}{d\theta}$,

$$\frac{d^2\rho}{d\theta}=\frac{-2am^2\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2+4am^2\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^4}$$

$$=\frac{-2am^2\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2+4am^2\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)^2}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^3}=-\rho m^2+\frac{2\rho m^2\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)^2}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}=$$

$$=-\rho m^2+\frac{2\rho m^2\left(e^{2m\theta}+e^{-2m\theta}+2e^{2m\theta}e^{-2m\theta}\right)^2}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}-\frac{4\rho m^2e^{m\theta}e^{-m\theta}}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}-\frac{4\rho m^2e^{m\theta}e^{-m\theta}}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}=$$

$$=\rho m^2-\frac{8\rho m^2}{\frac{4a^2}{\rho^2}}=\rho m^2-\frac{2\rho^3m^2}{a^2}\,.$$

Substituindo em $R=\dfrac{\left(\rho^2+\rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}$, vem

$$R=\frac{\left(\rho^2+\left(\dfrac{-2am\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\left(\dfrac{-2am\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}\right)^2-\rho\left(\rho m^2-\dfrac{2\rho^3m^2}{a^2}\right)}=$$

$$\frac{\left(\rho^2+\left(\dfrac{4a^2m^2\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)^2}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^4}\right)\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+\left(\dfrac{8a^2m^2\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)^2}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^4}\right)-\rho^2m^2+\dfrac{2\rho^4m^2}{a^2}}=$$

$$=\frac{\left(\rho^2+\dfrac{\rho^2m^2\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)^2}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+\left(\dfrac{2\rho^2m^2\left(e^{2m\theta}+e^{-2m\theta}+2e^{m\theta}e^{-m\theta}\right)}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}\right)-\dfrac{2\rho^2m^2e^{m\theta}e^{-m\theta}}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}-\dfrac{2\rho^2m^2\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}-\rho^2m^2+\dfrac{\rho^4m^2}{a^2}}=$$

$$=\frac{\left(\rho^2+\dfrac{\rho^2m^2\left(e^{2m\theta}+e^{-2m\theta}+2e^{m\theta}e^{-m\theta}\right)-\rho^2m^2\left(2e^{m\theta}e^{-m\theta}\right)-\rho^2m^2\left(2e^{m\theta}e^{-m\theta}\right)}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho^2m^2-\dfrac{4\rho^2m^2}{\dfrac{4a^2}{\rho^2}}-\rho^2m^2+\dfrac{\rho^4m^2}{a^2}}=$$

$$=\frac{\left(\rho^2+\rho^2m^2-\dfrac{-2\rho^2m^2}{\dfrac{4a^2}{\rho^2}}-\dfrac{2\rho^2m^2}{\dfrac{4a^2}{\rho^2}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\rho^2m^2-\dfrac{\rho^4m^2}{a^2}-\rho^2m^2+\dfrac{\rho^4m^2}{a^2}}=\frac{\left(\dfrac{4\rho^2a^2+4\rho^2m^2a^2-4\rho^4m^2}{4a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2\left(1+m^2\right)}$$

$$=\frac{\rho^3\left(a^2+m^2a^2-\rho^2m^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2a^3\left(1+m^2\right)}=\frac{\rho\left(a^2\left(1+m^2\right)-\rho^2m^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^3\left(1+m^2\right)}.$$

A partir da última expressão, é fácil verificar que a curva não tem pontos de inflexão, visto a curvatura não se anular.

No ponto A, por se ter $\rho = a$ o raio de curvatura é

$$R = \frac{a\left(a^2\left(1+m^2\right)-a^2m^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^3\left(1+m^2\right)} = \frac{a\left(a^2+a^2m^2-a^2m^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^3\left(1+m^2\right)} =$$

$$= \frac{a^4}{a^3\left(1+m^2\right)} = \frac{a}{\left(1+m^2\right)}.$$

A área percorrida pelo raio vector da espiral considerada quando θ varia desde 0 até θ

$$A = \frac{1}{2}\int_0^\theta \rho^2 d\theta = 2a^2\int_0^\theta \frac{d\theta}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2} = 2a^2\int_0^\theta \frac{d\theta}{\left(e^{2m\theta}+e^{-2m\theta}+2\right)^2} =$$

$$2a^2\int_0^\theta \frac{1}{e^{2m\theta}+\frac{1}{e^{2m\theta}}+2}d\theta = 2a^2\int_0^\theta \frac{e^{2m\theta}}{e^{4m\theta}+2e^{2m\theta}+1}d\theta = 2a^2\int_0^\theta 2e^{2m\theta}\left(2e^{2m\theta}+1\right)^{-2}d\theta =$$

$$\frac{2a^2}{2m^2}\int_0^\theta 2me^{2m\theta}\left(e^{2m\theta}+1\right)^{-2}d\theta = -\frac{a^2}{m^2}\left(e^{2m\theta}+1\right)^{-1}\Big]_0^\theta = \frac{a^2}{m^2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{e^{2m\theta}+1}\right].$$ **XV**

Para determinar o comprimento $s = \int\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$ do arco da espiral, compreendida entre o ponto A e o ponto $\left(\rho,\theta\right)$, substitui-se na última o resultado de $\frac{d^2\theta}{d\rho}$, e fica

$$s = \int_0^\theta \sqrt{\frac{4a^2}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}+\left(\frac{-2am\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^2}\right)^2}\,d\theta$$

$$= \int_0^\theta \sqrt{\frac{4a^2\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)^2+4a^2m^2\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)^2}{\left(e^{m\theta}+e^{-m\theta}\right)^4}}\,d\theta =$$

XV No Tratado das Curvas Especiais Notáveis de Gomes Teixeira $\frac{1}{m^2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{e^{2m\theta}+1}\right]$

$$=\frac{2a}{\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)^{2}}\int_{0}^{\theta}\sqrt{e^{2m\theta}+2e^{m\theta}e^{-m\theta}+e^{-2m\theta}+m^{2}e^{2m\theta}+2m^{2}e^{m\theta}e^{-m\theta}-m^{2}e^{-2m\theta}}\,d\theta=$$

$$=\frac{2a}{\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)^{2}}\int_{0}^{\theta}\sqrt{\left(1+m^{2}\right)\left(e^{2m\theta}+e^{-2m\theta}\right)+2\left(1-m^{2}\right)}\,d\theta\,.$$

Fazendo a substituição $e^{2m\theta}=z$, e derivando , $d\theta=\dfrac{dz}{2me^{2m\theta}}$, vem

$$=2a\int\frac{dz}{2me^{2m\theta}\left(e^{m\theta}-e^{-m\theta}\right)^{2}}\sqrt{\left(1+m^{2}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)+2\left(1-m^{2}\right)}=$$

$$=\frac{2a}{2m}\int\frac{dz}{z\left(z+2+\frac{1}{z}\right)}\sqrt{\frac{\left(1+m^{2}\right)\left(z^{2}+1\right)+2z\left(1-m^{2}\right)}{z}}=$$

$$\frac{2a}{2m}\int\frac{dz}{\left(z+1\right)^{2}}\sqrt{\frac{z^{2}\left(1+m^{2}\right)+2\left(1-m^{2}\right)z+1+m^{2}}{z}}=$$

$$\frac{2a}{2m}\int\frac{\left(1+m^{2}\right)z^{2}+2\left(1-m^{2}\right)z+\left(1+m^{2}\right)}{\left(z+1\right)^{2}\sqrt{z\left(1+m^{2}\right)z^{2}+2\left(1-m^{2}\right)z}+1+m^{2}}\,dz\,.$$

Supondo agora que $z\left[\left(1+m^{2}\right)z^{2}+2\left(1-m^{2}\right)z+\left(1+m^{2}\right)\right]=F\left(z\right)$,

obtêm-se a identidade:

$$\frac{F\left(z\right)}{z\left(z+1\right)^{2}}=\frac{z\left[\left(1+m^{2}\right)z^{2}+2\left(1-m^{2}\right)z+\left(1+m^{2}\right)\right]}{z\left(z+1\right)^{2}}$$

$$\frac{F\left(z\right)}{z\left(z+1\right)^{2}}=\frac{z^{2}+m^{2}z^{2}+2z-2m^{2}z+1+m^{2}}{\left(z+1\right)^{2}}$$

$$\frac{F\left(z\right)}{z\left(z+1\right)^{2}}=\frac{z^{2}+2z+1}{\left(z+1\right)^{2}}+\frac{m^{2}\left(z^{2}-2z+1\right)+4m^{2}z-4m^{2}z}{\left(z+1\right)^{2}}$$

$$\frac{F\left(z\right)}{z\left(z+1\right)^{2}}=1+\frac{m^{2}\left(z^{2}+2z+1\right)}{\left(z+1\right)^{2}}-\frac{4m^{2}z}{\left(z+1\right)^{2}}=1+m^{2}-\frac{4m^{2}z}{\left(z+1\right)^{2}}$$

$$\frac{F\left(z\right)}{z\left(z+1\right)^{2}}==1+m^{2}-4m^{2}\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{\left(z+1\right)^{2}}\right),$$

da qual se infere que o integral $\frac{2a}{2m}\int\frac{\left(1+m^2\right)z^2+2\left(1-m^2\right)z+\left(1+m^2\right)}{\left(z+1\right)^2\sqrt{z\left(1+m^2\right)z^2+2\left(1-m^2\right)z}+1+m^2}dz$ fica da forma

$$\frac{2a}{2m}\left[\left(1+m^2\right)\int\frac{dz}{\sqrt{F\left(z\right)}}-4m^2\int\frac{dz}{\left(z+1\right)\sqrt{F\left(z\right)}}+4m^2\int\frac{dz}{\left(z+1\right)^2\sqrt{F\left(z\right)}}\right].$$

Nesta expressão vamos empregar

$$\int\frac{dz}{\left(z+1\right)^2\sqrt{F\left(z\right)}}=\frac{\sqrt{F\left(z\right)}}{4m^2\left(z+1\right)}+\int\frac{dz}{\left(z+1\right)\sqrt{F\left(z\right)}}-\frac{1+m^2}{8m^2}\int\frac{\left(z+1\right)dz}{\sqrt{F\left(z\right)}},$$

que passaremos a demonstrar. Com efeito, para verificar a igualdade, basta verificar que

$$\left(\frac{\sqrt{F\left(z\right)}}{4m^2\left(z+1\right)}\right)'+\frac{1}{\left(z+1\right)\sqrt{F\left(z\right)}}-\frac{1+m^2}{8m^2}\frac{z+1}{\sqrt{F\left(z\right)}}=\frac{1}{\left(z+1\right)^2\sqrt{F\left(z\right)}}\Leftrightarrow$$

$$=\left(\frac{\frac{F'\left(z\right)}{2\sqrt{F\left(z\right)}}\times 4m^2\left(z+1\right)-4m^2\sqrt{F\left(z\right)}}{\left(4m^2\right)^2\left(z+1\right)^2}\right)'+\frac{1}{\left(z+1\right)\sqrt{F\left(z\right)}}-\frac{1+m^2}{8m^2}\frac{z+1}{\sqrt{F\left(z\right)}}=\frac{1}{\left(z+1\right)^2\sqrt{F\left(z\right)}}$$

como $F'\left(z\right)=\frac{F\left(z\right)}{z}+z\left(2z\left(1+m^2\right)+2\left(1-m^2\right)\right)$ vem

$$=\frac{\frac{F\left(z\right)}{z}\left(z+1\right)+\left(z^2+1\right)\times\left(2z\left(1+m^2\right)+2\left(1-m^2\right)\right)-2F\left(z\right)}{8m^2\left(z+1\right)^2\sqrt{F\left(z\right)}}+\frac{1}{\left(z+1\right)\sqrt{F\left(z\right)}}-$$

$$-\frac{1+m^2}{8m^2}\frac{z+1}{\sqrt{F\left(z\right)}}=\frac{1}{\left(z+1\right)^2\sqrt{F\left(z\right)}}$$

$$=\frac{\frac{F\left(z\right)}{z}+\left(z^2+z\right)\left[2z\left(1+m^2\right)+2\left(1-m^2\right)\right]-F\left(z\right)+8m^2\left(z+1\right)-\left(1+m^2\right)\left(z+1\right)^3}{8m^2\left(z+1\right)^2\sqrt{F\left(z\right)}}=$$

$$=\frac{8m^2}{8m^2\left(z+1\right)^2\sqrt{F\left(z\right)}}.$$

Para que fique provada a igualdade, basta verificar que o numerador é igual a $8m^2$.

Ora

$$\frac{F\left(z\right)}{z}+\left(z^2+z\right)\left[2z\left(1+m^2\right)+2\left(1-m^2\right)\right]-F\left(z\right)+8m^2z+8m^2-z^3-3z^2-3z-$$

$$-1-m^2z^3-3m^2z^2-3m^2z^2-m^2=$$

$$= \frac{F}{z} + 2z^3 + 2m^2z^3 + 2z^2 - 2m^2z^2 + 2z^2 + 2m^2z^2 + 2z - 2m^2z - F(z) + 8m^2 - z^3 - 3z^2 - 3z - 1 -$$

$$- m^2z^3 - 3m^2z^2 - -3m^2z^2 - 3m^2z - m^2 =$$

$$= \frac{F}{z} + z^3 + m^2z^3 + z^2 - z + 3m^2z + 7m^2 - 1 - 3m^2z^2 - F(z) =$$

$$= z^2 + m^2z^2 + 2z - 2m^2z + 1 + m^2 + z^3 + m^2z^3 + z^2 - z + 3m^2z + 7m^2 -$$

$$- 1 - 3m^2z^2 - z^3 - m^2z^3 - 2z^2 + 2m^2z^2 - z - m^2z = 8m^2 \text{ ,}$$

como queríamos provar.

Substituindo agora em

$$\frac{2a}{2m}\left[\left(1+m^2\right)\int\frac{dz}{\sqrt{F(z)}} - 4m^2\int\frac{dz}{(z+1)\sqrt{F(z)}} + 4m^2\int\frac{dz}{(z+1)^2\sqrt{F(z)}}\right],$$

a igualdade que acabamos de provar, fica

$$\frac{2a}{2m}\left[\left(1+m^2\right)\int\frac{dz}{\sqrt{F(z)}} - 4m^2\int\frac{dz}{(z+1)\sqrt{F(z)}} + \right.$$

$$\left. + 4m^2\left[\frac{\sqrt{F(z)}}{4m^2(z+1)} + \int\frac{dz}{(z+1)\sqrt{F(z)}} - \frac{1+m^2}{8m^2}\int\frac{(z+1)\,dz}{\sqrt{F(z)}}\right]\right]$$

$$\frac{2a}{2m}\left[\frac{2+2m^2}{2}\int\frac{1}{\sqrt{F(z)}}dz + \frac{\sqrt{F(z)}}{(z+1)} - \frac{1+m^2}{2}\int\frac{zdz}{\sqrt{F(z)}} - \frac{1+m^2}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{F(z)}}\right]$$

$$\frac{2a}{2m}\left[\frac{2+2m^2-1-m^2}{2}\int\frac{1}{\sqrt{F(z)}}dz + \frac{\sqrt{F(z)}}{(z+1)} - \frac{1+m^2}{2}\int\frac{zdz}{\sqrt{F(z)}}\right]$$

$$\frac{2a}{2m}\left[\frac{\sqrt{F(z)}}{(z+1)} + \frac{1+m^2}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{F(z)}} - \frac{1+m^2}{2}\int\frac{zdz}{\sqrt{F(z)}} + \right].$$

Podemos então concluir que o comprimento do arco depende de integrais elípticos, um de primeira espécie e outro de segunda espécie.

Para que os integrais elípticos que figuram neste último integral adquiram a forma usada por WEIERSTRASS, vamos fazer

$$z = v + h \quad \text{e} \quad h = -\frac{2}{3}\frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

Substituindo em $F(z)$ vem

$$\left(1+m^2\right)(v+h)^3+2\left(1+m^2\right)(v+h)^2+\left(1+m^2\right)(v+h)=$$

$$=\left(1+m^2\right)v^3+\left(1+m^2\right)3v^2h+\left(1+m^2\right)3vh^2+\left(1+m^2\right)h^3+\left(2-2m^2\right)v^2+$$
$$+\left(2-2m^2\right)2vh+\left(2-2m^2\right)h^2+\left(1+m^2\right)v+\left(1+m^2\right)h=$$

$$=\left(1+m^2\right)v^3+\left(3h+3m^2h+2-2m^2\right)v^2+\left(3h^2+3m^2h^2+4h-4m^2h+1+m^2\right)v+$$
$$+\left(h^3+m^2h^3+2h^2-2m^2h^2+h+m^2h\right)=$$

$$=\left(1+m^2\right)v^3+\left(3h^2\left(1+m^2\right)+4h\left(1-m^2\right)+\left(1+m^2\right)\right)v+$$
$$+\left(h^3\left(1+m^2\right)+2h^2\left(1-m^2\right)+\left(1+m^2\right)h\right),$$

conseguimos assim que desapareça o termo do segundo grau de $F(z)$,

$$\left(1+m^2\right)v^3+\left(3h^2\left(1+m^2\right)+4h\left(1-m^2\right)\times\frac{\left(1+m^2\right)}{\left(1+m^2\right)}\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(1+m^2\right)\right)v+$$
$$+\left(h^3\left(1+m^2\right)+2h^2\left(1-m^2\right)\frac{\left(1+m^2\right)}{\left(1+m^2\right)}\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(1+m^2\right)h\right)=$$

$$=\left(1+m^2\right)v^3+\left(3h^2\left(1+m^2\right)+4h^2\left(1+m^2\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(1+m^2\right)\right)v+h^3\left(1+m^2\right)+$$
$$+2h^3\left(1+m^2\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(1+m^2\right)h=$$

$$=\left(1+m^2\right)v^3+\left(3h^2\left(1+m^2\right)-6h^2\left(1+m^2\right)+\left(1+m^2\right)\right)v+h^3\left(1+m^2\right)-$$
$$-3h^3\left(1+m^2\right)+\left(1+m^2\right)h=$$

$$=\left(1+m^2\right)v^3+\left(-3h^2\left(1+m^2\right)+\left(1+m^2\right)\right)v+\left(-2h^3\left(1+m^2\right)+\left(1+m^2\right)h\right)=$$

$$=\left(1+m^2\right)\left[v^3+\left(-3h^2+1\right)v+h\left(-2h^2+1\right)\right].$$

Substituindo no agora no integral vem

$$\frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}\left[\frac{\sqrt{4v^3+4\left(-3h^2+1\right)v+4h\left(-2h^2+1\right)}}{2(v+h+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{2dv}{\sqrt{4v^3+4\left(-3h^2+1\right)v+4h\left(-2h^2+1\right)}}-\right]$$
$$-\frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}\left[\frac{1}{2}\int\frac{2(v+h)dv}{\sqrt{4v^3+4\left(-3h^2+1\right)v+4h\left(-2h^2+1\right)}}\right]=$$

$$=\frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}\left[\frac{\sqrt{4v^3-g_1v-g_2}}{2(v+h+1)}+\int\frac{dv}{\sqrt{4v^3-g_1v-g_2}}-\int\frac{(v+h)dv}{\sqrt{4v^3-g_1v-g_2}}\right]=$$

$$=\frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}\left[\frac{\sqrt{4v^3-g_1v-g_2}}{2(v+h+1)}+1-\left(-\frac{2}{3}\frac{1-m^2}{1+m^2}\right)\int\frac{dv}{\sqrt{4v^3-g_1v-g_2}}-\int\frac{vdv}{\sqrt{4v^3-g_1v-g_2}}\right]=$$

$$=\frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}\left[\frac{\sqrt{4v^3-g_1v-g_2}}{2(v+h+1)}+\left(\frac{m^2+5}{3(1+m^2)}\right)\int\frac{dv}{\sqrt{4v^3-g_1v-g_2}}-\int\frac{vdv}{\sqrt{4v^3-g_1v-g_2}}\right],$$

onde $g_1=4(3h^2-1)$ e $g_2=4h(2h^2-1)$.

9. Espiral Tractriz

Com o nome de espiral tractriz designa-se uma curva cuja tangente, em coordenadas polares, tem comprimento constante.

Como o comprimento da tangente, $T=\sqrt{\rho^2+St^2}$, é constante digamos a, deduz-se que $T=\sqrt{\rho^2+St^2}=a$.

Para determinar a equação da curva comecemos por determinar a subtangente que é dada por $St=\rho tgv$. Como $tgv=\frac{\rho}{\rho'}=\frac{\rho d\theta}{d\rho}$, fica $St=\rho^2\frac{d\theta}{d\rho}$.

Substituindo em $T=\sqrt{\rho^2+St^2}$ e quadrando obtém-se $T=\sqrt{\rho^2+\rho^4\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2}=a$, ou seja

$$\rho^2+\rho^4\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2=a^2\Leftrightarrow\rho^4d\theta^2=d\rho^2a^2-\rho^2d\rho^2\Leftrightarrow d\theta^2=\frac{a^2d\rho^2-\rho^2d\rho^2}{\rho^4}$$

$$d\theta=\pm\sqrt{\frac{d\rho^2\left(a^2-\rho^2\right)}{\rho^4}}\Leftrightarrow d\theta=\pm\frac{d\rho}{\rho^2}\sqrt{\left(a^2-\rho^2\right)}\Leftrightarrow d\theta=\pm\frac{d\rho\left(a^2-\rho^2\right)}{\rho^2\sqrt{\left(a^2-\rho^2\right)}}$$

$$d\theta=\pm\frac{a^2d\rho}{\rho^2\sqrt{\left(a^2-\rho^2\right)}}-\frac{d\rho}{\sqrt{\left(a^2-\rho^2\right)}}.$$

Para determinar a equação da curva, passamos a integrar esta equação de variáveis separadas

$$\int d\theta = \pm\left[\int \frac{a^2 d\rho}{\rho^2\sqrt{(a^2-\rho^2)}} - \int \frac{d\rho}{\sqrt{(a^2-\rho^2)}}\right].$$

Para resolver o primeiro integral do segundo membro da equação anterior, fazemos a substituição $\rho = asenu$ e $d\rho = a\cos udu$, $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Assim

$$\int \frac{a^2 d\rho}{\rho^2\sqrt{(a^2-\rho^2)}} = \int \frac{a^2}{a^2 sen^2 u\sqrt{a^2 - a^2 sen^2 u}} \times a\cos udu =$$

$$= \int \frac{a^3 \cos u}{a^2 sen^2 u\sqrt{a^2\left(1 - sen^2 u\right)}} du = \int \frac{a^3 \cos u}{a^3 sen^2 u \cos u} du = \int \frac{1}{sen^2 u} du =$$

$$= \int \cos ec^2 udu = \cot gu.$$

Para voltar, à variável inicial, note-se que

$senu = \frac{\rho}{a}$ e $\frac{\rho^2}{a^2} = \cos^2 u + 1 \Leftrightarrow -\cos u = \pm\sqrt{\frac{a^2-\rho^2}{a^2}}$.

Entãoo $-\cot gu = -\frac{\cos u}{senu} = -\frac{\sqrt{\frac{a^2-\rho^2}{a^2}}}{\frac{\rho}{a}} = -\frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho}$.

Portanto a equação da curva é

$$\theta = \pm\left[-\frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho} + arc\cos\frac{\rho}{a}\right],$$

na qual θ pode ser positivo ou negativo, não figurando nela a constante de integração, por ter sido eliminada pela condição $\theta = 0$, quando $\rho = a$.

Pela equação da curva e da sua diferencial verifica-se que, quando ρ varia desde a até 0, os valores de θ crescem desde 0 até ∞, e o ponto gerador da curva descreve um arco que parte do ponto $A = (a,0)$ e descreve um número infinito de voltas em torno da origem. Aos valores negativos de θ corresponde outro ramo igual ao anterior e simétrico em relação ao eixo Ox.

Passando para coordenadas cartesianas $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho sen\theta \end{cases}$, vemos que $dx = \cos\theta - \rho sen\theta \dfrac{d\theta}{d\rho}$ e $dy = sen\theta + \rho\cos\theta \dfrac{d\theta}{d\rho}$, sendo portanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sen\theta + \rho\cos\theta \dfrac{d\theta}{d\rho}}{\cos\theta - \rho\, sen\theta \dfrac{d\theta}{d\rho}} = \frac{sen\theta + \rho\left(-\dfrac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho}\right)\cos\theta}{\cos\theta - \rho\left(-\dfrac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho}\right)sen\theta} = \frac{sen\theta - \cos\theta \dfrac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho}}{\cos\theta + sen\theta \dfrac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho}}.$$

Desta igualdade, vê-se que os dois ramos da curva são tangentes ao eixo Ox quando $\rho = a$, onde em consequência a curva possui um ponto de retrocesso.

A mesma equação permite concluir que os pontos onde y passa por um valor máximo ou por um valor mínimo são definidos pelas condições

$$sen\theta - \cos\theta \frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho} = 0 \quad \wedge \quad \cos\theta + sen\theta \frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho} \neq 0 .$$

$$\frac{sen\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho} \Leftrightarrow tg\theta = \frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho},$$

e fazendo $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho sen\theta$, tem-se a equação

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{\rho} \Leftrightarrow y^2\left(x^2+y^2\right) = x^2\left(a^2-x^2-y^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^4 + x^4 + 2x^2y^2 = a^2x^2 \Leftrightarrow \left(y^2+x^2\right)^2 = a^2x^2 \Leftrightarrow y^2 + x^2 = \pm ax,$$

o que permite concluir que os pontos onde y passa por um máximo ou mínimo estão sobre circunferências, cujos centros estão sobre o eixo Ox, e a uma distância $\frac{1}{2}a$ da origem. Do mesmo modo se concluí que os pontos onde x passa por um máximo ou mínimo estão sobre as circunferências

$$y^2 + x^2 = \pm ay .$$

Para determinar a expressão do raio de curvatura da espiral tractriz substituiu-se em $R = \dfrac{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$, $\dfrac{d\rho}{d\theta}$ e $\dfrac{d^2\rho}{d\theta^2}$, que passamos a calcular

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2}=\frac{-2\rho\frac{d\rho}{d\theta}\sqrt{a^2-\rho^2}-\frac{\rho^2}{2\sqrt{a^2-\rho^2}}2\rho\frac{d\rho}{d\theta}}{a^2-\rho^2}=$$

$$=\frac{-2\rho\left(-\frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho}\right)\sqrt{a^2-\rho^2}+\frac{\rho^5}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\left(-\frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho}\right)}{a^2-\rho^2}=$$

$$=\frac{2\rho^3+a^2+\frac{\rho^5}{a^2-\rho^2}}{a^2-\rho^2}=\frac{2a^2\rho^3-2\rho^5+\rho^5}{\left(a^2-\rho^2\right)^2}=\frac{2a^2\rho^3-\rho^5}{\left(a^2-\rho^2\right)^2},$$

que substituindo obtêm-se

$$=\frac{\left(\rho^2+\left(-\frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho^2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\left(-\frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho^2}\right)^2-\rho\frac{2a^2\rho^3-\rho^5}{\left(a^2-\rho^2\right)^2}}=\frac{\left(\frac{\rho^2a^2-\rho^4+\rho^4}{a^2-\rho^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\rho^2\left(a^4-2a^2\rho^2+\rho^4\right)+2\rho^4\left(a^2-\rho^2\right)-\rho^4a^2+\rho^6}{\left(a^2-\rho^2\right)^2}}$$

$$R=\frac{\rho^3a^3\left(a^2-\rho^2\right)^2}{a^2\rho^2\left(a^2-2\rho^2\right)\left(a^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\rho a\sqrt{a^2-\rho^2}}{a^2-2\rho^2}.$$

Para determinar os pontos de inflexão da curva vamos resolver a seguinte equação

$a^2-2\rho^2=0\Leftrightarrow\rho=\frac{a}{\sqrt{2}}$ e

$$\theta=\pm\frac{\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}}{\frac{a}{\sqrt{2}}}-\arccos\frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{a}\Leftrightarrow\theta=\pm\frac{\sqrt{\frac{a^2}{2}}}{\frac{a}{\sqrt{2}}}-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\theta=\pm\left(1-\frac{\pi}{4}\right),$$

logo as coordenadas destes pontos são $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\pm\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Representando por α o ângulo da normal num ponto qualquer com o raio vector do mesmo, deduz-se que $tg\alpha=\frac{Sn}{\rho}$ (ver figura 4) , e como $Sn=\frac{\rho}{tgv}=\frac{\rho}{\frac{\rho}{\rho'}}=\rho'$, vem

$$tg\alpha = \frac{\rho'}{\rho} \Leftrightarrow tg\alpha = \frac{-\frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho^2}}{\rho} \Leftrightarrow tg\alpha = -\frac{\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}.$$

Logo a $\cot g\alpha = -\frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho}$ ou como $\frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$, vem $\cos^2\alpha = \frac{a^2-\rho^2}{a^2}$ ou $sen\alpha = \frac{\rho}{a}$, esta igualdade permite escrever o raio de curvatura na seguinte forma

$$R = \frac{\rho a\sqrt{a^2-\rho^2}}{a^2-2\rho^2} = \frac{\rho\frac{\rho}{sen\alpha}\sqrt{\frac{\rho^2}{sen^2\alpha}-\rho^2}}{\frac{\rho^2}{sen^2\alpha}-2\rho^2} = \frac{\frac{\rho^2\sqrt{\frac{\rho^2-\rho^2sen^2\alpha}{sen^2\alpha}}}{\rho^2-2\rho^2sen^2\alpha}}{sen^2\alpha}$$

$$R = \frac{\frac{\rho^3\cos\alpha}{sen^2\alpha}}{\frac{\rho^2\left(1-2sen^2\alpha\right)}{sen^2\alpha}} = \frac{\rho\cos\alpha}{1-2sen^2\alpha} = \frac{\rho\cos\alpha}{\cos^2\alpha - sen^2\alpha} = \frac{\rho\cos\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Designando por s, como habitualmente, o comprimento do arco da curva, vem

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2}d\rho \Leftrightarrow ds = \sqrt{\rho^2\left(\frac{a^2-\rho^2}{\rho^4}\right)+1}d\rho \Leftrightarrow ds = \sqrt{\frac{a^2}{\rho^2}}d\rho \Leftrightarrow ds = \pm\frac{a}{\rho}d\rho.$$

Tomando para origem dos arcos o ponto A,

$$s = \int_a^\rho -\frac{a}{\rho}d\rho = -a\ln|\rho|\Big]_a^\rho = -a\left[\ln|\rho| - \ln|a|\right] = -a\ln\left|\frac{\rho}{a}\right| = -a\ln|sen\alpha|.$$

Note-se que vai se usou $ds = -\frac{a}{\rho}d\rho$ para que $-aln|sen\alpha|$ seja positivo.

A área A descrita pelo raio vector da espiral tractriz, quando este varia desde a até um valor qualquer ρ é dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_a^\theta \rho^2 d\theta.$$

Comecemos por fazer a seguinte substituição $\theta = \rho$, que diferenciando mudando os limites de integração e substituindo vem

$$A = -\frac{1}{2}\int_a^\rho \rho^2\frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho^2}d\rho = -\frac{1}{2}\int_a^\rho \sqrt{a^2-\rho^2}d\rho.$$

Fazendo agora nova substituição da variável, a saber,

$$\rho = a\,sent\,,\; d\rho = a\cos t dt\,,\; \rho \to t = arcsen\frac{\rho}{a} \text{ e } a \to t = arcsen 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} \text{ obtêm-se}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{arcsen\frac{\rho}{a}} a^2\cos^2 t dt = -\frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{arcsen\frac{\rho}{a}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = -\frac{a^2}{4}\left[t + \frac{1}{2} sen 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{arcsen\frac{\rho}{a}} =$$

$$= -\frac{a^2}{4}\left[arcsen\frac{\rho}{a} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} sen 2\left(arcsen\frac{\rho}{a}\right) - \frac{1}{2} sen\pi\right].$$

Por se ter $sen 2t = 2 sent \cos t$, que no ponto $arcsen\frac{\rho}{a}$ se traduz em $sen 2\left(arcsen\frac{\rho}{a}\right) = \frac{2\rho}{a}\cos\left(arcsen\frac{\rho}{a}\right) = sen 2\left(arcsen\frac{\rho}{a}\right) = \frac{2\rho\sqrt{a^2-\rho^2}}{a^2}$, substituindo vem

$$= -\frac{a^2}{4}\left[arcsen\frac{\rho}{a} - \frac{\pi}{2} + \frac{2\rho}{2a^2}\sqrt{a^2-\rho^2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{a^2-\rho^2} - \frac{1}{4a^2} arcsen\frac{\rho}{a} + \frac{1}{8}a^2\pi\,.$$

10. Coleóide

A curva que tem por equação $\rho = a\frac{sen\theta}{\theta}$ chama-se cocleóide.

Da análise da equação, podemos perceber qual a forma da curva. Quando θ varia desde 0 até π o seu ponto gerador descreve o arco representado a vermelho na figura tangente ao eixo polar. Quando θ varia de π a ∞, obtêm-se uma série de arcos fechados todos tangentes ao eixo polar no ponto O.

Aos valores negativos de θ, obtêm-se outro ramo da curva, representada a azul na figura, simétrico ao anterior em relação ao eixo polar.

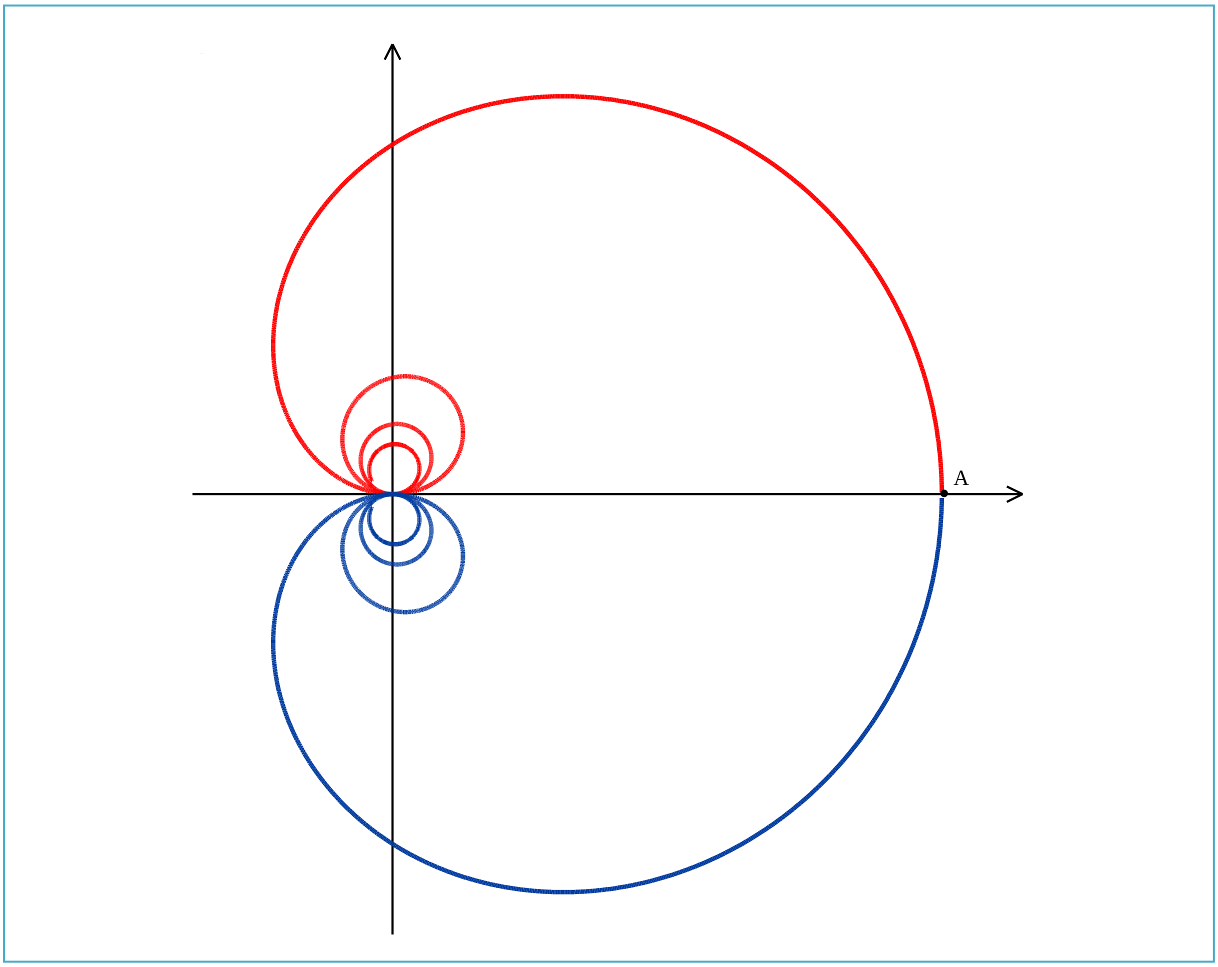

Figura 18-Clocleóide

$$a > 0$$

Calculando $\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{a(\theta cos\theta - sen\theta)}{\theta^2} = \frac{a\cos\theta}{\theta} - \frac{\rho}{\theta}$ e como $\theta\rho = asen\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{asen\theta}{\rho}$,

$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{a\cos\theta}{\frac{asen\theta}{\rho}} - \frac{\rho}{\frac{asen\theta}{\rho}} = \frac{\rho(a\cos\theta - \rho)}{asen\theta}$, através da qual podemos afirmar que $\frac{d\rho}{d\theta} = 0$,

quando $\rho = 0$ e também quando $\rho = a\cos\theta$.

Logo a circunferência de raio igual a $\frac{1}{2}OA$, e cujo centro coincide com o ponto médio de OA, intersecta a curva nos pontos onde ρ passa por um valor máximo ou mínimo.

Sendo (x,y) as coordenadas cartesianas e (ρ,θ) as coordenadas polares do mesmo ponto, então $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho sen\theta$, que derivando vem e $dx = \cos\theta - \rho sen\theta\frac{d\theta}{d\rho}$ e $dy = sen\theta + \rho\cos\theta\frac{d\theta}{d\rho}$ sendo, portanto,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{sen\theta+\rho\cos\theta\dfrac{d\theta}{d\rho}}{\cos\theta-\rho sen\theta\dfrac{d\theta}{d\rho}}=\frac{sen\theta+\rho\cos\theta\dfrac{asen\theta}{\rho\left(a\cos\theta-\rho\right)}}{\cos\theta-\rho sen\theta\dfrac{asen\theta}{\rho\left(a\cos\theta-\rho\right)}}=$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{sen\theta+\dfrac{a\cos\theta sen\theta}{a\cos\theta-\rho}}{\cos\theta-\dfrac{asen^2\theta}{a\cos\theta-\rho}}=\frac{2asen\theta\cos\theta-\rho sen\theta}{a\left(\cos^2\theta-sen^2\theta\right)-\rho\cos\theta}=$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{asen2\theta-\rho sen\theta}{a\cos 2\theta-\rho\cos\theta}=\frac{\dfrac{\theta\rho}{sen\theta}sen2\theta-\rho sen\theta}{\dfrac{\theta\rho}{sen\theta}\cos 2\theta-\rho\cos\theta},$$

como $a=\dfrac{\theta\rho}{\mathrm{sen}\,\theta}$, vem

$$\frac{\dfrac{\theta\rho sen2\theta-\rho sen^2\theta}{sen\theta}}{\dfrac{\theta\rho\cos 2\theta-\rho\cos\theta sen\theta}{sen\theta}}=\frac{\theta\rho sen2\theta-\rho sen^2\theta}{\theta\rho\cos 2\theta-\rho\cos\theta sen\theta}=\frac{\theta sen2\theta-sen^2\theta}{\theta\cos 2\theta-\frac{1}{2}sen2\theta}.$$

Utilizando a regra de Lópital, duas vezes, podemos concluir que a tangente à curva no ponto A é perpendicular ao eixo das abcissas.

A derivada $\dfrac{dy}{dx}$ só é infinita nos pontos que verifiquem

$$\theta\cos 2\theta-\frac{1}{2}sen2\theta=0\Leftrightarrow\theta\left(\cos^2\theta-sen^2\theta\right)-sen\theta\cos\theta=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{asen\theta}{\rho}\left(\cos^2\theta-sen^2\theta\right)-sen\theta\cos\theta=0\Leftrightarrow asen\theta\left(\cos^2\theta-sen^2\theta\right)-\rho sen\theta\cos\theta=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen\theta\left(a\left(\cos^2\theta-sen^2\theta\right)-\rho\cos\theta\right)=0\Leftrightarrow$$

$$a\left(\cos^2\theta-sen^2\theta\right)-\rho\cos\theta=0.$$

Mudando esta equação para coordenadas cartesianas, ou seja, fazendo

$x=\rho\cos\theta$ e $y=\rho sen\theta$,

verifica-se que $a\left(\dfrac{x^2}{\rho^2}-\dfrac{y^2}{\rho^2}\right)=x\Leftrightarrow ax^2-ay^2=\rho^2x\Leftrightarrow a\left(x^2-y^2\right)=\left(x^2+y^2\right)x$, logo todos os pontos em que a tangente é perpendicular ao eixo das abcissas pertencem à cúbica representada por esta equação, ou seja, uma estrofóide.

Para analisar os pontos onde a tangente é paralela ao eixo das abcissas resolvemos a equação $\frac{dy}{dx}=0$, ou seja,

$$\theta sen2\theta - sen^2\theta = 0 \Leftrightarrow 2\theta sen\theta \cos\theta - sen^2\theta = 0,$$

que conjugando com a equação da curva $\theta = \frac{a sen\theta}{\rho}$ vem

$$\Leftrightarrow 2asen\theta sen\theta \cos\theta - \rho sen^2\theta = 0 \Leftrightarrow sen^2\theta\left(2a\cos\theta - \rho\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\rho = 2a\cos\theta.$$

Esta igualdade permite concluir que os pontos procurados pertencem a uma circunferência de raio igual a a e centro em A.

A equação, em coordenadas polares, das tangentes à coleóide é

$$\rho sen\theta - \rho_0 sen\theta_0 = \frac{\theta_0 sen2\theta_0 - sen^2\theta_0}{\theta_0\cos 2\theta_0 - \frac{1}{2}sen2\theta_0}\left(\rho\cos\theta - \rho_0\cos\theta_0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho\left(sen\theta - \frac{2\theta_0 sen2\theta_0 - 2sen^2\theta_0}{2\theta_0\cos 2\theta_0 - sen2\theta_0}\cos\theta\right) = \rho_0 sen\theta_0 - \rho_0\cos\theta_0\frac{2\theta_0 sen2\theta_0 - 2sen^2\theta_0}{2\theta_0\cos 2\theta_0 - sen2\theta_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho\left(2\theta_0\cos 2\theta_0 sen\theta - sen\theta sen2\theta_0 - 2\theta_0 sen2\theta_0\cos\theta + 2sen^2\theta_0\cos\theta\right) =$$
$$2\theta_0\rho_0 sen\theta_0\cos 2\theta_0 - \rho_0 sen\theta_0 sen2\theta_0 - 2\theta_0\rho_0\cos\theta_0 sen2\theta + 2\rho_0\cos\theta_0 sen^2\theta_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho\left(2\theta_0 sen\left(\theta - 2\theta_0\right) - sen\theta sen2\theta_0 + 2sen^2\theta_0\cos\theta\right) =$$
$$\rho_0\left(2\theta_0 sen\left(\theta_0 - 2\theta_0\right) - sen\theta_0 sen2\theta_0\cos\theta_0 + 2\cos\theta_0 sen^2\theta_0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho\left(2\theta_0 sen\left(\theta - 2\theta_0\right) - 2sen\theta sen\theta_0\cos\theta_0 + 2sen^2\theta_0\cos\theta\right) =$$
$$\rho_0\left(-2\theta_0 sen\left(-\theta_0\right) - 2sen\theta_0 sen\theta_0\cos\theta_0 + 2\cos\theta_0 sen^2\theta_0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho\left(2\theta_0 sen\left(\theta - 2\theta_0\right) - 2sen\theta_0\left(sen\theta\cos\theta_0 - sen\theta_0\cos\theta\right)\right) = \rho_0\left(-2\theta_0 sen\theta_0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho\left(2\theta_0 sen\left(\theta - 2\theta_0\right) - 2sen\theta_0 sen\left(\theta - \theta_0\right)\right) = \rho_0\left(-2\theta_0 sen\theta_0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0}\frac{2\theta_0 sen\left(\theta - 2\theta_0\right) - 2sen\theta sen\left(\theta - \theta_0\right)}{-2\theta_0 sen\theta_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\rho} = -\frac{sen(\theta - 2\theta_0)}{\rho_0 sen\theta_0} + \frac{sen(\theta - \theta_0)}{asen\theta_0}.$$ XVI

O raio de curvatura da curva determina-se por $R = \frac{\left(\rho^2 + \rho^{'2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho^{'2} - \rho\rho^{''}}$. Calculando $\frac{d^2\rho}{d\theta}$, vem

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \frac{\left[\frac{d\rho}{d\theta}(a\cos\theta - \rho) + \rho\left(-asen\theta - \frac{d\rho}{d\theta}\right)\right]asen\theta - \rho(a\cos\theta - \rho)a\cos\theta}{a^2 sen^2\theta} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\rho(a\cos\theta - \rho)^2}{asen\theta} - \rho asen\theta - \frac{\rho^2(a\cos\theta - \rho)}{asen\theta}\right)asen\theta - \rho(a\cos\theta - \rho)a\cos\theta}{a^2 sen^2\theta} =$$

$$= \frac{\rho(a\cos\theta - \rho)^2 - \rho a^2 sen^2\theta - \rho^2(a\cos\theta - \rho) - \rho a(a\cos\theta - \rho)\cos\theta}{a^2 sen^2\theta} =$$

$$= \frac{\rho a^2\cos^2\theta - 2\rho^2 a\cos\theta + \rho^3 - \rho a^2 sen^2\theta - \rho^2 a\cos\theta + \rho^3 - \rho a^2\cos^2\theta + \rho^2 a\cos\theta}{a^2 sen^2\theta} =$$

$$= \frac{-2\rho^2 a\cos\theta + 2\rho^3 - \rho a^2 sen^2\theta}{a^2 sen^2\theta} = \frac{-2\rho^2 a\cos\theta + 2\rho^3 - \rho^3\theta^2}{a^2 sen^2\theta}$$, que substituindo vem

$$R = \frac{\left(\rho^2 + \left(\frac{\rho(a\cos\theta - \rho)}{asen\theta}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\left(\frac{\rho(a\cos\theta - \rho)}{asen\theta}\right)^2 - \rho\left(\frac{-2\rho^2 a\cos\theta + 2\rho^3 - \rho^3\theta^2}{a^2 sen^2\theta}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\rho^2 + \frac{\rho^2 a^2\cos^2\theta - 2\rho^3 a\cos\theta + \rho^4}{a^2 sen^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + \frac{2\rho^2 a^2\cos^2\theta - 4\rho^3 a\cos\theta + 2\rho^4}{a^2 sen^2\theta} + \frac{2\rho^3 a\cos\theta - 2\rho^4 + \rho^4\theta^2}{a^2 sen^2\theta}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\left(\rho^2 a^2 sen^2\theta + \rho^2 a^2\cos^2\theta - 2\rho^3 a\cos\theta + \rho^4\right)^{\frac{3}{2}}}{a^3 sen^3\theta}}{\frac{\rho^2 a^2 sen^2\theta + 2\rho^2 a^2\cos^2\theta - 4\rho^3 a\cos\theta + 2\rho^4 + 2\rho^3 a\cos\theta - 2\rho^4 + \rho^4\theta^2}{a^2 sen^2\theta}} \Leftrightarrow$$

XVI No Tratado das Curvas Especiais Notáveis de Gomes Teixeira

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{sen(\theta - 2\theta_0)}{\rho_0} + \frac{sen(\theta - \theta_0)}{asen\theta_0}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\rho^2 a^2 \left(sen^2\theta + \cos^2\theta\right) - 2\rho^3 a\cos\theta + \rho^4\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\rho^4\theta^2 + 2\rho^2 a^2\left(1 - sen^2\theta\right) - 2\rho^3 a\cos\theta + \rho^4\theta^2\right) a sen\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\rho^2\left(a^2 - 2\rho a\cos\theta + \rho^2\right)\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\rho^4\theta^2 + 2\rho^2 a^2 + 2\rho^2 a^2 sen^2\theta - 2\rho^3 a\cos\theta + \rho^4\theta^2\right)\rho\theta} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\rho^3\left(a^2 - 2\rho a\cos\theta + \rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\rho^4\theta^2 + 2\rho^2 a^2 + 2\rho^4\theta^2 - 2\rho^3 a\cos\theta + \rho^4\theta^2\right)\rho\theta} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\rho^3\left(a^2 - 2\rho a\cos\theta + \rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2\theta\rho^3\left(a^2 - \rho a\cos\theta\right)} \Leftrightarrow \frac{\left(a^2 - 2\rho a\cos\theta + \rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2\theta\left(a^2 - \rho a\cos\theta\right)}.$$

11. A Clotóide

A Clotóide é a espiral de equação

$$\rho s = a^2,$$

sendo ρ o raio de curvatura da curva num ponto qualquer, s o comprimento do arco compreendido entre esse ponto e um ponto fixo e a uma constante.

Para obter a equação da curva em coordenadas cartesianas, vamos recorrer ao cálculo integral.

Conjugando as equações $\left|\alpha'(t)\right| = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}$ e $\left|\alpha''(s)\right| = K(s)$, e tendo em conta que o raio de curvatura é o inverso da curvatura, deduz-se que

$$\left(x''\right)^2 + \left(y''\right)^2 = \frac{1}{\rho^2}.$$

Por se ter $\left(x'\right)^2 + \left(y'\right)^2 = 1$, derivando vem $2x'x'' + 2yy'' = 0 \Leftrightarrow y'' = -\frac{x'}{y'}x''$, e substituindo em

$$\left(x''\right)^2 + \left(y''\right)^2 = \rho^{-2} \Leftrightarrow \left(x''\right)^2 + \left(\frac{x'}{y'}x''\right)^2 = \rho^{-2} \Leftrightarrow \left(x''\right)^2 = \frac{\rho^{-2}}{1 + \frac{x'}{y'}}$$

$$\Leftrightarrow \left(x^{''}\right)^2 = \frac{\rho^{-2}}{\left(x^{'}\right)^2 + \left(y^{'}\right)^2}\left(y^{'}\right)^2,$$ e por $\left(x^{'}(t)\right)^2 + \left(y^{'}(t)\right)^2 = 1$ vem $\left(x^{''}\right)^2 = \rho^{-2}\left(y^{'}\right)^2 \Leftrightarrow x^{''} = \frac{1}{\rho}y^{'}$. Analogamente se deduz $y^{''} = \frac{1}{\rho}x^{'}$.

Das equações diferenciais deduzidas infere-se

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{\rho}\frac{dy}{ds} \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{1}{\rho}\frac{dx}{ds},$$

das quais se deduz também as seguintes

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{s}{a^2}\frac{dy}{ds} \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{s}{a^2}\frac{dx}{ds}. \qquad \textbf{(1)}$$

Vamos integrar, fazendo a substituição

$$\frac{dx}{ds} = t \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{ds} = z$$

que derivando vem

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{dt}{ds} \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{dz}{ds}.$$

Conjugando estas últimas com as equações **(1)** vem

$$\frac{dt}{ds} = \frac{s}{a^2}\frac{dy}{ds} \Leftrightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{s}{a^2}z \qquad \text{e} \qquad \frac{dz}{ds} = -\frac{s}{a^2}\frac{dx}{ds} \Leftrightarrow \frac{dz}{ds} = -\frac{s}{a^2}\frac{dx}{ds}.$$

E como a equação $ds^2 = dx^2 + dy^2$ equivale a

$$\frac{ds^2}{ds^2} = \frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} \Leftrightarrow t^2 + z^2 = 1$$

substituindo vem

$$\frac{dt}{ds} = \frac{s}{a^2}\sqrt{1-t^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{dz}{ds} = -\frac{s}{a^2}\sqrt{1-z^2}.$$

Resolvendo a equação diferencial de variáveis separáveis $\frac{dt}{ds} = \frac{s}{a^2}\sqrt{1-t^2}$, obtêm-se

$$a^2dt = ds \times s\sqrt{1-t^2},$$

podendo ser escrita na forma

$$\frac{a^2dt}{\sqrt{1-t^2}} = sds .$$

Integrando vem

$$\int \frac{a^2}{\sqrt{1-t^2}} dt - \int sds = 0 \Leftrightarrow$$

$$a^2 arcsent + c1 - \left(\frac{s^2}{2} + c2 \right) = c3 \Leftrightarrow t = sen\left(\frac{s^2}{2a^2} + c_1 \right),$$

e como $\frac{dx}{ds} = t$, vem

$$\frac{dx}{ds} = sen\left(\frac{s^2}{2a^2} + c_1 \right).$$

De forma análoga se deduz a equação $\frac{dy}{ds} = \cos\left(\frac{s^2}{2a^2} + c_1 \right)$.

Para determinar os valores de x e y dispomos das equações:

$$x = \int_0^s sen\left(\frac{s^2}{2a^2} + c_1 \right) ds + c_2 \quad \text{e} \quad y = \int_0^s \cos\left(\frac{s^2}{2a^2} + c_1 \right) ds + c_3 ,$$

as quais podem ser simplificadas, adoptando para origem das coordenadas o ponto origem dos arcos, (onde $s = 0$) e para eixo das ordenadas tangente à curva no mesmo ponto. Uma vez que neste caso, tem-se que $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ e $c_3 = 0$, e portanto,

$$x = \int_0^s sen\left(\frac{s^2}{2a^2} \right) ds \quad \text{e} \quad y = \int_0^s \cos\left(\frac{s^2}{2a^2} \right) ds . \quad \textbf{(2)}$$

Da equação $\rho s = a^2$, pode-se inferir a forma da clotóide, ou seja, ρ somente adquire o valor ∞, quando $s = 0$, e só será igual a zero, quando s é ∞. Logo, a curva tem um ponto de inflexão na origem. Tendo em conta que o raio de curvatura é o inverso da curvatura, podemos também concluir que a curvatura aumenta constantemente com s.

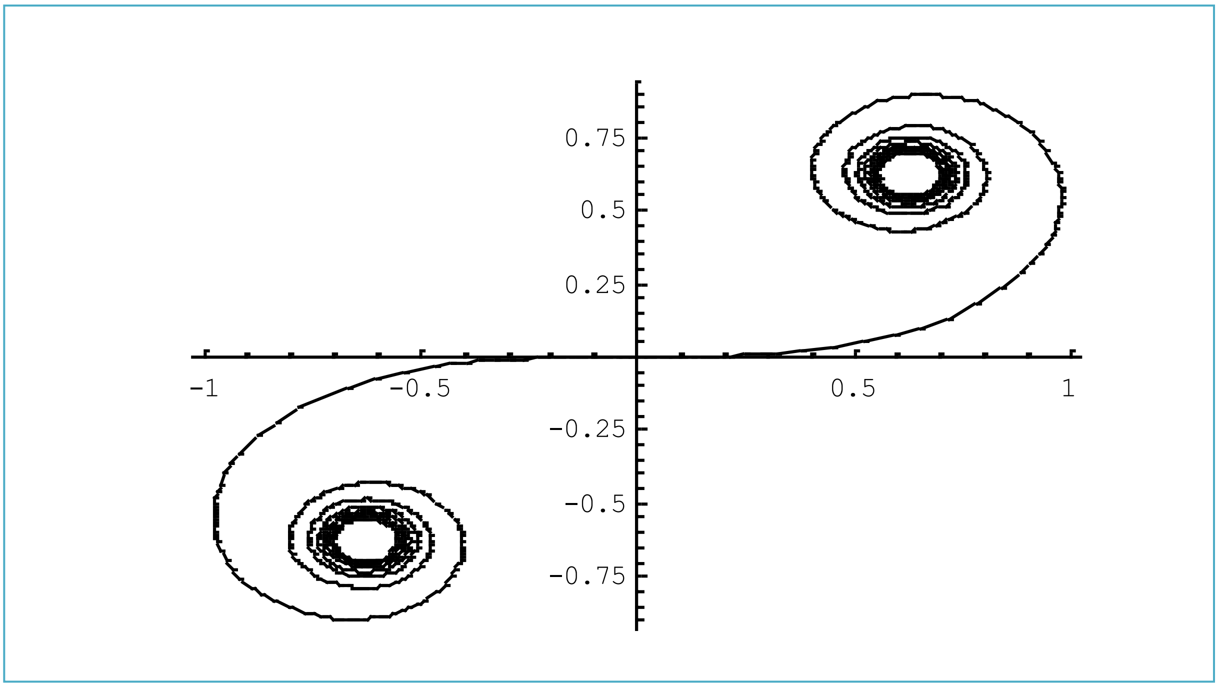

Figura 19-Clotoide

Da relação $\dfrac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)}{sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)} = \cot g\left(\dfrac{s^2}{2a^2}\right)$, conclui-se também que as tangentes à curva, paralelas ao eixo das abcissas correspondem aos valores de $\dfrac{s^2}{2a^2} = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{2}, \ldots.$ E os pontos onde as tangentes são paralelas ao eixo das abcissas correspondem aos valores de $\dfrac{s^2}{2a^2} = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots.$

Nas equações **(2)**, vamos fazer a seguinte substituição

$$\frac{s^2}{2a^2} = v$$

e tomando como limite de s o ∞, vem

$$\lim_{s=\infty} x = \int_0^\infty senv \times \frac{a}{\sqrt{2v}}\, dv \Leftrightarrow \lim_{s=\infty} x = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{senv}{\sqrt{v}}\, dv.$$

Analogamente, $\lim\limits_{s=\infty} y = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos v}{\sqrt{v}}\, dv.$

Os integrais que figuram nestas equações são conhecidos da Análise pelo nome de integrais de Fresnel e representam o número constante $\dfrac{a}{2}\sqrt{\pi}$.

Portanto

$$\lim_{s=\infty} x = \frac{a}{2}\sqrt{\pi} \qquad \text{e} \qquad \lim_{s=\infty} y = \frac{a}{2}\sqrt{\pi}\ .$$

Logo a curva aproxima-se indefinidamente de $\left(\frac{1}{2}a\sqrt{\pi}, \frac{1}{2}a\sqrt{\pi}\right)$, conforme s se aproxima, também indefinidamente, de ∞.

Fazendo $s=-s$, x e y mudam de sinal, logo a curva possui outro ramo igual ao considerado, disposto nos eixos das coordenadas negativas, como o primeiro está nos eixos positivos.

A clotóide tem duas propriedades interessantes que se referem aos centros de gravidade dos seus arcos, que passamos a enunciar e demonstrar:

1. O centro de gravidade de qualquer arco da clotóide pertence à recta que une os centros de curvatura dos extremos do mesmo arco.

Sejam s_0 e s_1 os valores de s a contar da origem das coordenadas, até às extremidades de um arco da clotóide; (x_0,y_0) e (x_1,y_1) as coordenadas destes pontos e (X,Y) as coordenadas do centro de gravidade do arco.

Sabemos que

$$(s_1-s_0)\,X = \int_{s_0}^{s_1} x(s)\,ds \qquad \text{e} \qquad (s_1-s_0)\,Y = \int_{s_0}^{s_1} y(s)\,ds\,,$$

conforme foi dito no primeiro capítulo deste trabalho.

Conjugando estas equações com as da curva vem

$$(s_1-s_0)\,X = \int_{s_0}^{s_1} x(s)\,ds = \int_{s_0}^{s_1} 1\left(\int_0^s sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)\right)ds\,,$$

que integrando por partes obtêm-se

$$\left[s\int_0^s sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)ds\right]_{s_0}^{s_1} - \int_{s_0}^{s_1} s\times sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)ds = s_1\int_0^{s_0} sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)ds - s_0\int_0^{s_1} sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) - \int_{s_0}^{s_1} s\times sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)ds$$

$$= s_1\int_0^{s_1} sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)ds - s_0\int_0^{s_0} sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)ds - \int_{s_0}^{s_1} s\times sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)ds\,.$$

Logo

$$\left(s_1 - s_0\right) X = s_1 \int_0^{s_1} sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds - s_0 \int_0^{s_0} sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds + a^2 \left(\cos\left(\frac{s_1^2}{2a^2}\right) - \cos\left(\frac{s_0^2}{2a^2}\right)\right).$$

De forma análoga, podemos obter

$$\left(s_1 - s_0\right) Y = s_1 \int_0^{s_1} cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds - s_0 \int_0^{s_0} cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) - a^2 \left(sen\left(\frac{s_1^2}{2a^2}\right) - sen\left(\frac{s_0^2}{2a^2}\right)\right).$$

Para determinar o centro de curvatura $\left(\alpha, \beta\right)$, dadas por

$$\alpha = f\left(t\right) - \frac{\left[f'^2 + g'^2\right] g'}{f' g'' - f'' g'} \qquad \text{e} \qquad \beta = g\left(t\right) + \frac{\left[f'^2 + g'^2\right] f'}{f' g'' - f'' g'},$$

sendo $f = \int_0^{s_1} sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds$ e $g = \int_0^{s_1} \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds$ vem

$$\alpha = \int_0^s sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds - \frac{\left[sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)^2 + \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)^2\right] \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)}{sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)\left(-\frac{s}{a^2} sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)\right) - \left(\frac{s}{a^2} \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)\right) \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)}$$

$$= \int_0^s sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds - \frac{\cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)}{-\frac{s}{a^2}} = \int_0^s sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds + \frac{a^2}{s} \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right),$$

$$\beta = \int_0^s \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds + \frac{\left[sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)^2 + \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)^2\right]\left(sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)\right)}{sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)\left(-\frac{s}{a^2} sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)\right) - \left(\frac{s}{a^2} \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)\right) \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)}$$

$$= \int_0^s cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds + \frac{sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)}{-\frac{s}{a^2}} = \int_0^s \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds - \frac{a^2}{s} sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right).$$

Representando por $\left(\alpha_0, \beta_0\right)$ e $\left(\alpha_1, \beta_1\right)$ as coordenadas dos centros de curvatura nas extremidades do arco considerado, podemos ver que

$$s_1\alpha_1 - s_0\alpha_0 = s_1\int_0^{s_1} sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)ds + a^2\cos\left(\frac{s_1^2}{2a^2}\right) - s_0\int_0^{s_0} sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) - a^2\cos\left(\frac{s_2^2}{2a^2}\right),$$ ou seja

igual $(s_1 - s_0)X$,

$$s_1\beta_1 - s_0\beta_0 = s_1\int_0^{s_1}\cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right)ds - a^2 sen\left(\frac{s_1^2}{2a^2}\right) - s_0\int_0^{s_0}\cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) + a^2\, sen\left(\frac{s_2^2}{2a^2}\right)$$ ou seja

igual $(s_1 - s_0)Y$.

Então

$$(s_1 - s_0)X = s_1\alpha_1 - s_0\alpha_0 \qquad \text{e} \qquad (s_1 - s_0)Y = s_1\beta_1 - s_0\beta_0 .$$

Considerando o determinante

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ \alpha_0 & \beta_0 & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 1 \end{vmatrix}$$

ou $$\begin{vmatrix} (s_1 - s_0)X & (s_1 - s_0)Y & (s_1 - s_0) \\ s_1\alpha_1 & s_1\beta_1 & s_1 \\ -s_0\alpha_0 & s_0\beta_0 & s_0 \end{vmatrix},$$

verifica-se por meio das igualdades anteriores que o determinante é igual a zero, logo o centro de gravidade de um arco e os centros de curvatura das extremidades do mesmo arco são colineares, logo pertencem à mesma recta.

2. As coordenadas do centro de gravidade do arco OP, sendo P um ponto da clotóide, está situado na intersecção do círculo osculador em P com a perpendicular à tangente em O, traçada pelo ponto (α_1, β_1).

Nas expressões já determinadas

$$\left(s_1 - s_0\right) X = s_1 \int_0^{s_1} sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds - s_0 \int_0^{s_0} sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) + a^2 \left(\cos\left(\frac{s_1^2}{2a^2}\right) - \cos\left(\frac{s_0^2}{2a^2}\right)\right) \text{ e}$$

$$\left(s_1 - s_0\right) Y = s_1 \int_0^{s_1} cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds - s_0 \int_0^{s_0} cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) - a^2 \left(\mathrm{s}en\left(\frac{s_1^2}{2a^2}\right) - \mathrm{s}en\left(\frac{s_0^2}{2a^2}\right)\right),$$

quando $s = 0$ vem

$$s_1 X = s_1 \int_0^{s_1} sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds + a^2 \left(\cos\left(\frac{s_1^2}{2a^2}\right) - 1\right) \quad \text{e} \quad s_1 Y = s_1 \int_0^{s_1} \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds - a^2\, \mathrm{s}en\left(\frac{s_1^2}{2a^2}\right).$$

Por outro lado, calculando α_1 e β_1 nas fórmulas já encontradas

$$\alpha = \int_0^{s} sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds + \frac{a^2}{s} \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right), \qquad \beta = \int_0^{s} \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds + \frac{a^2}{s} \mathrm{s}en\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) \text{ vem}$$

$$\alpha_1 = \int_0^{s_1} sen\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds + \frac{a^2}{s_1} \cos\left(\frac{s_1^2}{2a^2}\right) \quad \text{e} \quad \beta_1 = \int_0^{s_1} \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds + \frac{a^2}{s_1} \mathrm{s}en\left(\frac{s_1^2}{2a^2}\right).$$

Verifica-se que

$$s_1 X = s_1 \alpha_1 - a^2 \text{ e } Y = \beta_1 .$$

E sendo a equação do círculo osculador da clotóide, no ponto $\left(x_1, y_1\right)$ é $\left(x - \alpha_1\right)^2 + \left(y - \beta_1\right)^2 = \frac{a^4}{s_1^2}$, verifica-se, por substituição que X e Y a satisfazem.

Conclusão

Tendo este trabalho chegado ao fim, sinto que o conhecimento que adquiri são pilares importantes para a minha formação. Com a realização desta tese tive oportunidade de elevar os meus conhecimentos científicos em várias áreas do saber.

Consciente da necessidade de uma permanente e actualizada formação continuarei a pugnar pelo seu crescimento e enriquecimento.

Para terminar gostaria de registrar a minha admiração por este grande matemático português, Francisco Gomes Teixeira.

Bibliografia

Teixeira, Francisco Gomes,(1912) "Curso de Analyse Infinitesimal" - Calculo Integral. (3^{a} Ed). *Obras Sobre Matemática* (Vol. 6) Coimbra: Imprensa da Universidade.

P.Appell e D. Dautheville(1910) “Précis de Mécanique” Gauthier-Villars, Paris

Lawrence, J. Dennis. (1972) “A Catalog of Special Plane Curves” Dover publications, New York

Rutter, John W. (1935) “Geometry of Curves” Chapman & Hall.

Carmo, Manfredo P. (1976) “Differential Geometry of Curves and Surfaces” Prentice Hall, New Jersey

Teixeira, Francisco Gomes(1905) “ Tratado de Las Curvas Especiales Notables” Gazeta de Madrid, Obra publicada em tomo XXII de las Memorias de la Real academia de Ciencias exactas, Físicas y Naturales de Madrid

Teixeira, Francisco Gomes, “ Traité des Courbes Spéciales Remarquables planes er gauches, Éditions Jacques Gabay