



Universidades Lusíada

Marinho, Adília Maria Lúcia Teixeira Gomes, 1966-

Os quaterniões e suas aplicações

<http://hdl.handle.net/11067/338>

Metadados

Data de Publicação	2013-09-12
Resumo	Este trabalho aborda o tema dos quaterniões e a sua importância na aplicação ao mundo tecnológico. Com o título os quaterniões e suas aplicações pretendemos dar um pequeno contributo, iluminando uma temática muito interessante. Na génese dos quaterniões está o matemático irlandês William Rowan Hamilton que, motivado por uma profunda convicção de que os quaterniões poderiam revolucionar a Matemática e a Física, foi o pioneiro de uma nova teoria que transformou o mundo moderno. Hoje, confrma-se q...
Palavras Chave	Quaterniões
Tipo	masterThesis
Revisão de Pares	Não
Coleções	[ULL-FCEE] Dissertações

Esta página foi gerada automaticamente em 2025-05-17T10:23:29Z com informação proveniente do Repositório



UNIVERSIDADE LUSÍADA DE LISBOA

Faculdade de Ciências da Economia e da Empresa

Mestrado em Matemática

Os quaterniões e suas aplicações

Realizado por:

Adília Maria Lúcia Teixeira Gomes Marinho

Orientado por:

Prof.^a Doutora Margarida Moreira Barros

Constituição do Júri:

Presidente: Prof. Doutor Mário Caldeira Dias
Orientadora: Prof.^a Doutora Margarida Moreira Barros
Arguente: Prof.^a Doutora Maria Adelaide Duarte Carreira Leite Videira

Dissertação aprovada em: 30 de Julho de 2013

Lisboa

2012



UNIVERSIDADE LUSÍADA DE LISBOA

Os Quaterniões e suas Aplicações

Adília Maria Lúcia Teixeira Gomes Marinho

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre

Lisboa, Outubro 2012



UNIVERSIDADE LUSÍADA DE LISBOA

Os Quaterniões e suas Aplicações

Adília Maria Lúcia Teixeira Gomes Marinho

*Dissertação apresentada à Universidade Lusíada para
obtenção do grau de mestre em Matemática
sob a orientação da Professora Doutora Margarida Barros*

Lisboa, Outubro 2012

Agradecimentos

Inspirada na problemática e beleza da álgebra dos quatérniões, após ininterruptas análises e aplicações conjugadas pela procura de uma inusitada rotação em \mathbb{R}^3 que justifique a elaboração desta tese, aqui fica a nota histórica do meu reconhecimento:

...à minha orientadora, Professora Doutora Margarida Barros, sempre disponível, exigente, com um notável sentido de orientação, seriedade, determinação e vasto conhecimento no domínio da matemática. Para mim, uma referência do ensino da matemática;

...à minha família (pais, Afonso (filho) e Carlos Marinho (marido) pelas vezes que evitaram momentos de “Gimbal Lock”);

...ao meu amigo, Professor Doutor António Machiavelo, pelo apoio e a todos que me enviaram material e sugeriram alguma bibliografia;

...à Universidade Lusíada pela credibilidade e o aprender exigente proporcionado;

...aos meus colegas de mestrado.

Resumo

Este trabalho aborda o tema dos quaterniões e a sua importância na aplicação ao mundo tecnológico. Com o título “os quaterniões e suas aplicações” pretendemos dar um pequeno contributo, iluminando uma temática muito interessante.

Na génese dos quaterniões está o matemático irlandês William Rowan Hamilton que, motivado por uma profunda convicção de que os quaterniões poderiam revolucionar a Matemática e a Física, foi o pioneiro de uma nova teoria que transformou o mundo moderno. Hoje, confirma-se que os quaterniões e suas aplicações se manifestam em diferentes ramos das ciências tais como a mecânica, a geometria, a física matemática, com grande relevo na animação em 3D e na robótica.

Este trabalho está dividido em diversas fases. Inicialmente, fazemos uma introdução com as razões subjacentes à escolha deste tema. Num segundo ponto, apresentamos o raciocínio e motivações de Hamilton na descoberta dos quaterniões, numa nota histórica. Num terceiro momento, fazemos um estudo dos quaterniões e suas representações. Apresentamos as operações que conferem a estrutura de álgebra, bem como as suas propriedades fundamentais, tal como a descrição de resultados algébricos de grande utilidade. De seguida, fazemos um estudo das rotações em \mathbb{R}^3 , com as várias representações através de matrizes, quaterniões, eixo-ângulo e ângulos de Euler. Por fim, descrevemos e analisamos algumas aplicações de forma exaustiva que demonstram que este conteúdo tem uma utilidade definitiva na evolução da tecnologia. Ilustramos como os quaterniões são utilizados apresentando alguns resultados muito interessantes no domínio da trigonometria esférica, aeronáutica, engenharia aeroespacial e astronomia. O trabalho termina com uma breve indicação dos prós e contras na utilização de quaterniões versus matrizes ou ângulos de Euler e uma conclusão final do trabalho.

Em síntese, os quaterniões são um conteúdo estratégico no desenvolvimento de diversos ramos das ciências com diferentes aplicações que fazem girar o mundo.

Abstract

This work examines the theme of quaternions and their importance in applications to the technological world. With the title “quaternions and their applications” we aim to make a small contribution, illuminating a very interesting subject.

On the genesis of the quaternions is the Irish mathematician William Rowan Hamilton who had a deep conviction that quaternions could revolutionize Mathematics and Physics, he was the pioneer of a new theory that transformed the modern world. Today, it is confirmed that quaternions and their applications are manifested in different branches of science such as mechanics, geometry, mathematical physics, with great emphasis on 3D animation and robotics.

This paper is divided into several stages. At first we present an introduction with the reasons behind the choice of this theme. Secondly, we present the rationale and motivations of Hamilton in the discovery of quaternions, in a historical note. In a third moment, we make a study of quaternions and their representations. Here we present the operations that provide the algebraic structure and their fundamental properties, as well as the algebraic description of useful results. Then we study rotations in \mathbb{R}^3 with several representations such as matrices, quaternions, axis-angle and Euler angles. Finally, we describe and analyze exhaustively some applications that demonstrate that this subject has a definite usefulness in the evolution of technology. We illustrate how quaternions are used by introducing very interesting results in the field of spherical trigonometry, aeronautics, aerospace engineering and astronomy. The paper ends with a brief indication of the pros and cons in using quaternions versus matrices or Euler angles, and with a final conclusion of the work.

In summary, the quaternions are a strategic content in the development of various branches of sciences with different applications that make the world go around.

Índice

1	Introdução	12
2	Nota histórica	14
3	Álgebra dos quaterniões	22
3.1	Definição de um quaternião	22
3.1.1	Adição	23
3.1.2	Multiplicação	24
3.1.3	Conjugado	26
3.1.4	Norma	27
3.1.5	Inverso	28
3.1.6	Divisão	31
3.1.7	Outras representações dos quaterniões	31
3.2	Alguns resultados algébricos	33
4	Rotações em \mathbb{R}^3	37
4.1	Matrizes de rotação	37
4.1.1	Alguns resultados clássicos sobre matrizes de rotação	39
4.1.2	Operador matricial de rotação	43

4.2	Quaterniões e rotações	43
4.2.1	Operador quaterniônico de rotação	44
4.2.2	Composição de operadores quaterniônicos de rotação	51
4.2.3	Alguns resultados relevantes sobre quaterniões	53
4.2.4	O eixo e o ângulo de uma rotação dada por um quaternião	54
4.3	Ângulos de Euler	55
4.4	Das matrizes para o eixo-ângulo e vice-versa	58
4.4.1	Ângulos de Euler	63
4.5	Dos quaterniões para as matrizes e vice-versa	64
4.5.1	Ângulos de Euler	67
5	Aplicações	69
5.1	Uso de quaterniões em trigonometria esférica	69
5.1.1	Triângulos esféricos	70
5.1.1.1	Análise quaterniônica	72
5.1.1.2	Triângulos esféricos retângulos	79
5.1.1.3	Triângulos esféricos isósceles	80
5.1.2	Polígono regular de <i>n lados</i> na esfera	80
5.2	Exemplo do uso de quaterniões na aeronáutica	88
5.2.1	Análise matricial	91
5.2.2	Análise quaterniônica	92
5.2.3	<i>Gimbal lock</i>	93
5.3	Exemplo do uso de quaterniões em engenharia aeroespacial	96
5.3.1	Composição orbital de ângulos de Euler	98

5.3.2	Composição da efeméride orbital	99
5.3.3	Análise quaterniônica	100
5.4	Exemplo do uso de quaterniões em astronomia	104
5.4.1	Resultados a partir da sequência fechada de rotações (1)	107
5.4.2	Resultados a partir da sequência fechada de rotações (2)	111
5.4.3	Resultados a partir da sequência fechada de rotações (3)	115
5.4.4	Análise de um caso particular do local: Lisboa	119
5.5	Vantagens e desvantagens matrizes/ângulos de Euler/quaterniões . . .	130
6	Conclusões	133

Lista de abreviaturas

\mathbb{H} – conjunto dos quaterniões

\mathcal{IH} – conjunto dos quaterniões puros

S^3 – conjunto dos quaterniões unitários

S^2 – conjunto dos quaterniões puros e unitários

\mathbb{H}^* – conjunto dos quaterniões não nulos

$\Re(q)$ – parte real do quaternião q

$\Im(q)$ – parte imaginária do quaternião q

$M_2(\mathbb{C})$ – matrizes 2×2 de \mathbb{C}

$\text{Tr}(A)$ – traço da matriz A

$SO(3)$ – conjunto das matrizes de rotação em \mathbb{R}^3

z^* – conjugado de z

q^{-1} – inverso de q

R_γ^z – rotação do referencial em torno do eixo z segundo o ângulo γ

$(R_\gamma^z)'$ – rotação do ponto em torno do eixo z segundo o ângulo γ

$R_{z,\gamma}$ – matriz da rotação do referencial em torno do eixo z segundo o ângulo γ

$R'_{z,\gamma}$ – matriz da rotação do ponto em torno do eixo z segundo o ângulo γ

$q_{z,\gamma}^*$ – conjugado do quaternião $q_{z,\gamma}$

A^* – conjugada da matriz A

A^t – transposta da matriz A

c. q. d. – como queríamos demonstrar

Capítulo 1

Introdução

O desenvolvimento da matemática no século XIX foi considerado por muitos autores como a “*Idade de Ouro*”. Produziu-se em quantidade e qualidade, introduziram-se novos conceitos, aprofundaram-se e diversificaram-se os campos de pesquisas, determinando grandes avanços nos diversos ramos da *Álgebra*, *Geometria* e *Análise*, dando-se uma grande ênfase à abstração e ao rigor da fundamentação. Entre os grandes vultos da matemática surge William Hamilton que deu uma decisiva contribuição na formulação e desenvolvimento das chamadas *Álgebra Simbólica* e *Linear* [Ros10, pp. 39–55].

Um momento de inspiração de Hamilton numa caminhada realizada junto ao “Royal Canal” com a sua mulher, reformou uma ideia que persistia há séculos. Descobriu que a propriedade comutativa da multiplicação não era necessária para uma álgebra consistente. Esta descoberta fez com que a sua dedicação fosse total aos quaterniões para o resto da sua vida.

A opção por este tema tem subjacentes motivações de ordem pessoal, natureza educativa e de atualidade temática. A atualidade do tema vai sendo referida ao longo do trabalho, com uma abordagem, no final, da relevância da aplicação dos quaterniões na animação 3D e na robótica. A motivação de natureza educativa reside, para além do interesse na álgebra quaterniônica, em fornecer mais um exemplo de matemática que se desenvolve impulsionada pela própria matemática, mas que vem a ser bastante aplicada de múltiplas formas. Para a autora é fascinante o estudo numa área onde se vislumbra, em aplicações práticas, a importância da matemática no contexto da vida real. Um dos objetivos deste estudo, que foi alcançado, passava por iluminar, apesar

de alguma invisibilidade aos olhos do mundo, a importância da matemática em tudo o que nos rodeia. Os quaterniões são o conteúdo que justifica esta constante procura na construção de um modelo físico que fundamenta a relevância da matemática. De facto, a matemática é a *alma mater* de todas as ciências e o motor de todas as coisas. Do mesmo modo pensava o frade e matemático inglês do séc. XIII Roger Bacon que defendia que “*a Matemática é a porta e a chave das outras ciências*”¹ [Bac28, p. 116].

¹Esta frase foi retirada do texto que transcrevemos de seguida: “*There are four great sciences, without which the other sciences cannot be known nor a knowledge of things secured ... Of these sciences the gate and key is mathematics ... He who is ignorant of this [mathematics] cannot know the other sciences nor the affairs of this world*”. Refira-se que os sites descritos na bibliografia desta tese, estavam disponíveis durante o tempo que durou este trabalho.

Capítulo 2

Nota histórica

Without the quaternions, as a stepping stone, it is doubtful if the vector analysis of three dimensions, and matrix theory would have been discovered as soon as they were (circa 1885), and much of today's physics, chemistry, and engineering would not exist.

Richard Andree [And71, p. 86]

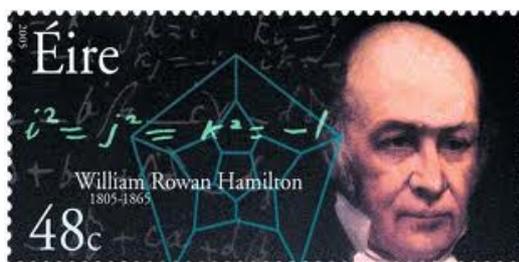


Figura 2.1: O governo Irlandês dedicou o ano de 2005 a William Rowan Hamilton, proclamando-o como: “Hamilton Year 2005”, celebrando o bicentenário do seu nascimento. Para assinalar este acontecimento foi emitido este selo comemorativo.

Na origem da álgebra dos quaterniões está o matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805–1865). Aos 17 anos entrou no “Trinity College” em Dublin para estudar matemática. No decurso dos seus estudos graduados detetou um erro no grande trabalho realizado pelo matemático Laplace, “Celestial Mechanics” que originou uma reação pública do Presidente da Academia referindo-se a William Hamilton como “the first mathematician of is age”. Aos 21 anos foi nomeado astrónomo real da

Irlanda, assumindo o cargo de diretor do Observatório de Dunsink. Em simultâneo acumulou o lugar de professor de astronomia do “Trinity College” da Universidade de Dublin. Nos anos seguintes, distinguiu-se em diversos domínios da matemática pura e aplicada, nomeadamente na óptica, na dinâmica, nas equações diferenciais e na teoria das equações [Swe94, p. 62–63].

A sua aplicação contínua no estudo de novas formas matemáticas (entre as quais tentou basear a teoria dos números reais como noção do tempo [Suz02, pp. 611–613]) traduziu-se na descoberta de um novo conceito de álgebra, centrada nos ainda misteriosos números complexos. Até aí a álgebra estava subordinada à visualização de números complexos na forma $x + iy$ como pares ordenados (x, y) e no trabalho que se podia produzir com estes pares ordenados de números reais [Str67, p. 171].

Começou por legitimar a utilização tradicional dos números complexos na matemática, também denominados de números hiper-complexos de classe 2. Demonstrou que as operações de números complexos $x + iy$ são equivalentes àquelas que se efetuam com pares ordenados reais (x, y) usando as propriedades usuais. Sobre este tema publicou o trabalho *Theory of Algebraic Couples* [Ros10, p. 60]. O matemático irlandês pensou depois em estender esta álgebra a ternos ordenados.

A origem desta investigação foi motivada pela sua curiosidade na interpretação geométrica da adição e da multiplicação de números complexos no plano coordenado \mathbb{R}^2 . A interpretação geométrica do produto de dois números complexos é dada por uma rotação de vetores¹ no plano composta com uma homotetia. Esta conexão entre a álgebra dos números complexos e as rotações no plano intrigou-o. Tentou por isso, descobrir uma relação análoga no espaço tridimensional usando triplos de números reais. Durante longos anos tentou produzir uma forma de multiplicar ternos de números reais que satisfizessem as propriedades usuais, contudo toda a sua aplicação nesta matéria não teve o sucesso desejado [CS03, p. 7].

Hoje sabemos que não existe uma multiplicação \mathbb{R} -linear de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ em \mathbb{R}^3 que prolongue a multiplicação de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mergulhado em \mathbb{R}^3 pela aplicação $(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha, \beta, 0)$. Com efeito, se $e := (1, 0, 0)$, $i := (0, 1, 0)$, $j := (0, 0, 1)$ é a base canónica de \mathbb{R}^3 , então ij deverá ter a forma $\rho e + \sigma i + \tau j$, para alguns $\rho, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$. Supondo que

¹Hamilton foi o primeiro matemático a usar o termo “*vetor*” [Mor99, p. 4].

$i^2 = -e$, e que esta operação é associativa, resulta que $i(ij) = ii(j) = -j$ e que

$$-j = \rho i - \sigma e + \tau ij = \rho i - \sigma e + \tau(\rho e + \sigma i + \tau j) = (\tau\rho - \sigma)e + (\tau\sigma + \rho)i + \tau^2 j,$$

então como e, i e j são linearmente independentes, $\tau^2 = -1$, implicando $\tau \notin \mathbb{R}$, o que é absurdo [CG96, p. 196].

Em 1835 foi-lhe atribuído o título de “Sir”. Esta distinção foi justificada pelo seu contributo no domínio da ótica. Posteriormente, foi eleito Presidente do “Royal Irish Academy”, em 1837. Apesar de todo o prestígio e sucesso que recolheu pelo trabalho desenvolvido em anos anteriores, o problema da álgebra dos ternos ordenados continuou a inquietá-lo pelo menos durante mais de uma década. Uma parte substancial da sua energia foi dedicada a este objeto de estudo.

Hamilton começou por considerar, como ternos de números reais os que tinham a forma $\alpha + i\beta + \gamma j$ tal que $i^2 = j^2 = -1$. Supôs, igualmente, a existência de um elemento neutro e efetuou o cálculo do quadrado de um número nas condições definidas anteriormente

$$(\alpha + i\beta + \gamma j)^2 = \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2i\alpha\beta + 2j\alpha\gamma + 2ij\beta\gamma, \quad (2.1)$$

onde o segundo membro é calculado da forma usual, supondo que é verificada a propriedade comutativa. De seguida, confirmou que a multiplicação destes números satisfazia a lei do módulo: o comprimento do produto de dois vetores é igual ao produto dos seus comprimentos, que pode ser escrita algebricamente por $|XY| = |X||Y|$. Entendeu que esta lei seria fundamental para que a sua teoria fosse consistente. Hamilton procurava um produto que preservasse as distâncias tal como acontecia nos números complexos. O comprimento é tomado no sentido euclideano, sendo que

$$|\alpha + i\beta + \gamma j| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

No caso particular em que $X = Y$, tem-se

$$|X^2| = |X|^2.$$

De seguida, desenvolveu a equação anterior atendendo à equação (2.1),

$$\begin{aligned} |(\alpha + i\beta + \gamma j)^2| &= |\alpha + i\beta + \gamma j|^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2i\alpha\beta + 2j\alpha\gamma + 2ij\beta\gamma| &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 + (2\alpha\beta)^2 + (2\alpha\gamma)^2 + (2\beta\gamma)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2.$$

Mas como,

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 = (\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2 + (2\alpha\beta)^2 + (2\alpha\gamma)^2,$$

Hamilton estabeleceu que o produto devia satisfazer a condição $ij = 0$. Contudo, esta ideia não o satisfaz. É nessa altura que se apercebe que o termo correto seria $ij + ji$ em vez de $2ij$ e que a igualdade $ij = -ji$ seria suficiente para anular o termo $(ij + ji)\beta\gamma$, levando-o a abandonar em definitivo o uso da propriedade comutativa.

Concluiu que a propriedade comutativa da multiplicação não é necessária para uma álgebra consistente. Esta sua decisão foi fundamental para conseguir ultrapassar em definitivo uma ideia que perdurava há séculos. Esta rotura com o passado ficou associada a um momento de inspiração ocorrido a 16 de outubro de 1843, enquanto caminhava com a sua mulher entre o “Royal Canal” de Dublin até à “Brougham Bridge”². Nesse momento, retirou o seu bloco de notas do bolso e escreveu as equações fundamentais entre i , j e k . Mais tarde, na carta dirigida ao seu filho Archibald definiu de uma forma original este momento como [CG96, p. 199]³:

Not could I resist the impulse — unphilosophical as it may have been — to cut with a knife on a stone of Brougham Bridge the fundamental formula with the symbols i , j , k :

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Escreveu igualmente ao seu amigo John Graves a 17 de outubro de 1843 referindo que [CG96, p. 197]⁴:

²Na verdade, a ponte chama-se “Broome Bridge”. Aparentemente foi erradamente soletrada por Hamilton. Nos dias de hoje, na parede onde Hamilton cravou as equações, encontra-se uma placa a assinalar o local [Han06, p. 7].

³*Nem pude resistir ao impulso — não muito racional — para cortar com uma faca sobre uma pedra da Ponte de Brougham a fórmula fundamental com os símbolos i , j , k : $i^2 = j^2 + k^2 = ijk = -1$.*

⁴*Eis-me, portanto, tentado por um momento a imaginar que $ij = 0$. Mas isso pareceu-me estranho e desconfortável, e percebi que a mesma supressão do termo a mais, pode ser obtida supondo o que me pareceu menos chocante, isto é, que $ij = -ji$. Fiz portanto, $ij = k$, $ji = -k$, reservando-me a pergunta se k era ou não 0.*

Behold me therefore tempted for a moment to fancy that $ij = 0$. But this seemed odd and uncomfortable, and I perceived that the same suppression of the term which was de trop might be attained by assuming what seemed to me less harsh, namely that $ij = -ji$. I made therefore $ij = k$, $ji = -k$, reserving to myself to enquire whether k was 0 or not.

Neste episódio Hamilton terá percebido que esta descoberta seria o ponto de partida que o levaria a fazer dos quaterniões o tema de estudo primordial para o resto da sua vida. Todavia, até o seu melhor amigo John Graves se mostrou cético em relação à sua descoberta e entusiasmo. Em resposta a uma carta de Hamilton que afirma que os quaterniões têm aplicações na física e que pode certamente usá-los para obter resultados na trigonometria esférica escreve [Sti04, p. 391]⁵:

There is still something in the system that gravels me. I have not yet any clear views as to the extent to which we are at liberty arbitrarily to create imaginaries, and to endow them with supernatural properties...

Porém, nada fez perturbar Hamilton em relação a esta matéria e no desenvolvimento que pretendia fazer a partir desse momento. Esta ideia genial foi decisiva e deu uma nova direção ao seu problema: com a introdução de k deu o salto até uma quarta dimensão, isto é, a família $(1, i, j, k)$ era linearmente independente. Na carta dirigida a Graves, escreveu [CG96, p. 197]⁶:

and there dawned on me the notion that we must admit, in some sense, a fourth dimension of space for the purpose of calculating with triplets.

Entretanto no cálculo de k^2 ,

$$k^2 = (ij)(ij) = i(ji)j = -i(ij)j = -i^2j^2 = -1,$$

⁵Há ainda alguma coisa no sistema que me perturba. Ainda não tenho ideias claras sobre até que ponto temos liberdade para criar arbitrariamente imaginários, e dotá-los com propriedades sobrenaturais...

⁶e ali me dei conta que temos de admitir, em certo sentido, uma quarta dimensão do espaço para se conseguir calcular com ternos.

a propriedade associativa foi referida talvez pela primeira vez na história da Matemática. Hamilton destacou este facto, quando escreveu [CG96, p. 197]⁷:

...the commutative character is lost...However it will be found that another important property of the old multiplication is preserved, or extended to the new, namely, that which may be called the associative character of the operation...

Muitos anos antes, no século XVIII, Leonard Euler, numa carta a Goldbach em 4 de maio de 1748, apresentou implicitamente as leis de multiplicação de quaterniões sob a forma do “Teorema dos quatro quadrados” que referia o seguinte: *Dados dois inteiros x e y , escritos como uma soma de quatro quadrados, isto é*

$$x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad \text{e} \quad y = e^2 + f^2 + g^2 + h^2,$$

então o seu produto também corresponde a uma soma de quatro quadrados,

$$xy = l^2 + m^2 + n^2 + o^2.$$

Para além de Euler, também Carl Gauss conhecia implicitamente as leis de multiplicação de quaterniões. Em 1819 numa nota (não publicada na época) sobre “Mutações no Espaço” percebeu que, ao usar números complexos, o teorema dos quatro quadrados decorria da igualdade:

$$(|u|^2 + |v|^2)(|w|^2 + |z|^2) = |uw + vz|^2 + |uz^* - vw^*|^2,$$

onde u, v, w e $z \in \mathbb{C}$ e u^*, v^*, w^*, z^* são os respetivos conjugados de u, v, w e z . Esta igualdade surgia do seguinte resultado:

$$\det \begin{pmatrix} u & v \\ -v^* & u^* \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} w & -z^* \\ z & w^* \end{pmatrix} = \det \left[\begin{pmatrix} u & v \\ -v^* & u^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w & -z^* \\ z & w^* \end{pmatrix} \right].$$

Hamilton considerou que o teorema dos quatro quadrados foi o resultado essencial para validar a sua teoria dos quaterniões e reconheceu um papel ativo na criação

⁷...o carácter comutativo está perdido...Porém, ver-se-á que uma outra importante propriedade da antiga multiplicação é preservada ou alargada na nova, mais precisamente, o que pode ser chamado de carácter associativo da operação...

dos quaterniões apenas aos matemáticos contemporâneos Gauss e Grassman [CG96, p. 199].

Em 1853, Hamilton publicou o livro “Lectures on Quaternions” com alguns dos seus resultados. Volvidos 13 anos, em 1866 foi publicado, a título póstumo, o livro “Elements of Quaternions” [Smi59, p. 677].

Em “Lectures on Quaternions” Hamilton mostrou a utilidade dos quaterniões na geometria e na trigonometria esférica. No entanto, foi nos “Elements of Quaternions” que demonstrou aos geómetras e físicos que os quaterniões eram úteis no estudo da geometria, da mecânica e da física matemática. Hamilton considerou este trabalho como sendo a sua obra-prima [Bel45, pp. 201–202].

Alguns autores são de opinião que Hamilton dedicou demasiado tempo ao estudo dos quaterniões e suas aplicações à geometria, havendo reações ténues com poucos matemáticos a partilharem do seu entusiasmo [Sti04, p. 402].

Apesar de tudo, durante algum tempo, os quaterniões foram um dos temas centrais de estudo em cursos de matemática. Em Dublin, foi implementado um exame de carácter obrigatório onde constavam como um conteúdo exigido. Em algumas universidades americanas, estes faziam parte da matemática avançada que era lecionada. Surgiu, inclusive, uma escola de “quaternistas” em dois países, na Irlanda e na Inglaterra, que foi liderada após a morte de Hamilton por Peter Tait e Benjamin Pierce [CS03, p. 7].

Ainda nessa época, surgiram algumas vozes que contrariaram a importância e utilidade dos quaterniões, entre as quais do Lord Kelvin que ficou famoso pelo trabalho em termodinâmica. Num comentário agressivo e caústico relativamente à descoberta de Hamilton referiu o seguinte [CG96, p. 201]⁸:

Quaternions came from Hamilton after his really good work was done; and though beautifully ingenious, have been an unmixed evil to those who have touched them in any way.

Por outro lado, em contraste com as vozes dissonantes, Thomas Hill, aluno de

⁸*Os quaterniões provieram de Hamilton após o seu trabalho realmente bom e, apesar de maravilhosamente engenhosos, têm sido maléficos para todos aqueles que de alguma maneira os abordaram.*

Benjamin Pierce e presidente de Havard, em 1862, afirma [CG96, p. 201]⁹:

In the great mathematical birth of 1843, the Quarternions of Hamilton, there is as much real promise of benefit to mankind as in event of Victoria's reign.

Os quaterniões revolucionaram a matemática. Hoje, confirma-se que os quaterniões e as suas aplicações abarcam diferentes ramos das ciências que levou o matemático E. T. Bell a escrever [Bel45, p. 189]¹⁰:

To the astonishment of some, it was found that the modified algebras, such as Hamilton's quaternions, were adaptable to mechanics, geometry, and mathematical physics. The dead hand of authoritative tradition had been brushed aside; mathematics was free.

⁹No grande nascimento matemático de 1843, os Quaterniões de Hamilton, existe igualmente uma promessa real de benefício para a humanidade tal e qual como num evento do reinado de Victoria.

¹⁰Para o espanto de alguns, verificou-se que as álgebras modificadas, tais como os quaterniões de Hamilton, eram adaptáveis à mecânica, geometria e física matemática. A mão morta da tradição autoritária tinha sido posta de lado; a matemática era livre.

Capítulo 3

Álgebra dos quaterniões

Neste capítulo fazemos uma introdução ao estudo dos quaterniões e das suas diferentes representações. Apresentamos as operações que lhes conferem a estrutura de álgebra, bem como as suas propriedades fundamentais. Terminamos com a exposição de resultados algébricos de grande utilidade.

3.1 Definição de um quaternião

Um quaternião é um elemento de \mathbb{R}^4 , logo pode ser escrito na forma $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, onde q_0, q_1, q_2 e q_3 são números reais que se designam componentes do quaternião.

Considere-se a base de \mathbb{R}^4 dada por

$$\mathbf{1} = (1, 0, 0, 0), \mathbf{i} = (0, 1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 0, 1).$$

Nesta base um quaternião é da forma

$$q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3.$$

Esta foi a representação usada por Hamilton que impôs as seguintes condições [Ham67, p. 2]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1 \\ \mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji} \\ \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj} \\ \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

que permitem definir a multiplicação. O conjunto de todos os quaterniões denota-se por \mathbb{H} , ou seja

$$\mathbb{H} = \{q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Definição 3.1.1 *Dois quaterniões $p, q \in \mathbb{H}$ são iguais se e só se tiverem as mesmas componentes.*

O quaternião q também pode ser representado na forma

$$q = q_0 + \mathbf{q},$$

onde $q_0 = \Re(q)$ diz-se a *parte real* do quaternião e $\mathbf{q} = \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 = \Im(q)$ é chamada a *parte pura* ou *imaginária* do quaternião.

Se $q_0 = 0$, então diz-se que o quaternião $q = \mathbf{q} = \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$ é um quaternião puro. Para o conjunto de todos os quaterniões puros vamos usar a notação \mathcal{IH} , isto é,

$$\mathcal{IH} = \{q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 \in \mathbb{H} : q_0 = 0\}.$$

Temos, então, que um quaternião é a soma de um escalar q_0 com um vetor \mathbf{q} de \mathbb{R}^3 , sendo agora \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} a base usual de \mathbb{R}^3 , a saber, $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Podemos ainda representar o quaternião na forma $q = (q_0, \mathbf{q})$.

3.1.1 Adição

Definição 3.1.2 *A adição de dois quaterniões p e q é definida pela adição das componentes correspondentes.*

Como a adição de quaterniões assim definida é exatamente a mesma para os números de \mathbb{R}^4 , podemos afirmar que \mathbb{H} satisfaz as seguintes propriedades em relação à adição:

- (a) *existe um elemento neutro, o quaternião zero, ou seja, o que tem as coordenadas todas nulas;*
- (b) *cada elemento tem um inverso, a que se chama o seu simétrico;*
- (c) *é associativa;*

(d) é comutativa.

Conclui-se que $(\mathbb{H}, +)$ é um grupo abeliano.

3.1.2 Multiplicação

Começemos por definir o produto de um quaternião por um *escalar* [Val64, p. 33].

Definição 3.1.3 *Sejam $q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$ um quaternião e $c = c + \mathbf{0}$ um escalar. Então*

$$c * q = cq_0 + \mathbf{i}cq_1 + \mathbf{j}cq_2 + \mathbf{k}cq_3.$$

Por simplificação de escrita vamos omitir, em geral, o símbolo $*$ daqui em diante.

É fácil provar que, dados os escalares c_1 e c_2 e os quaterniões p e q , se verificam as seguintes igualdades:

$$(a) \quad (c_1 c_2) q = c_1 (c_2 q);$$

$$(b) \quad (c_1 + c_2) q = c_1 q + c_2 q;$$

$$(c) \quad c_1 (p + q) = c_1 p + c_1 q;$$

$$(d) \quad 1 q = q.$$

Como \mathbb{H} com a operação de adição é um grupo abeliano e verifica as propriedades anteriores, conclui-se que \mathbb{H} é um *espaço vetorial real*.

O produto de dois quaterniões p e q é determinado pelas condições (3.1) de Hamilton e por se exigir que seja associativo.

Definição 3.1.4 *Considerem-se os quaterniões $p = p_0 + \mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3$ e $q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$. O produto de p por q é*

$$\begin{aligned} pq &= (p_0 + \mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3)(q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3) = \\ &= (p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3) + \mathbf{i}(p_0 q_1 + p_1 q_0 + p_2 q_3 - p_3 q_2) + \\ &\quad + \mathbf{j}(p_0 q_2 - p_1 q_3 + p_2 q_0 + p_3 q_1) + \mathbf{k}(p_0 q_3 + p_1 q_2 - p_2 q_1 + p_3 q_0). \end{aligned}$$

Podemos, ainda, reescrever esta definição atendendo às definições de produtos escalar e vetorial em \mathbb{R}^3 . Esta definição foi apresentada por Benjamin Olinde Rodrigues, matemático francês de ascendência portuguesa [Rib11, p. 8].

Definição 3.1.5 (Olinde Rodrigues) *Sejam $p = p_0 + \mathbf{p}$ e $q = q_0 + \mathbf{q}$ então*

$$pq = p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}, \quad (3.2)$$

onde $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ representa o produto interno dos vetores e $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ representa o produto vetorial.

É curioso notar que uma das ferramentas mais usadas na geometria e na física é o vetor, uma noção que surgiu com os quaterniões de Hamilton. A análise vetorial foi desenvolvida mais tarde, acabando por prevalecer relativamente ao uso dos quaterniões. O resultado da multiplicação dos quaterniões puros

$$\mathbf{p} = \mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3 \quad \text{e} \quad \mathbf{q} = \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3,$$

que é igual a

$$\mathbf{p}\mathbf{q} = -(p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) + \mathbf{i}(p_2q_3 - p_3q_2) + \mathbf{j}(p_3q_1 - p_1q_3) + \mathbf{k}(p_1q_2 - p_2q_1),$$

representa a soma do produto vetorial dos vetores \mathbf{p} e \mathbf{q} com o simétrico do produto interno dos vetores \mathbf{p} e \mathbf{q} , isto é

$$\mathbf{p}\mathbf{q} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}. \quad (3.3)$$

A álgebra vetorial começou a partir deste produto quaterniônico com o matemático Josiah Gibbs que publicou o seu trabalho no ano de 1901 [Mal04, pp. 6–7].

Na multiplicação pq , temos que

$$\Re(pq) = p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \quad (3.4)$$

e

$$\Im(pq) = p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}. \quad (3.5)$$

Também se verifica facilmente que, dados os quaterniões $p, q, r \in \mathbb{H}$ e $c \in \mathbb{R}$, a multiplicação de quaterniões verifica as seguintes propriedades:

$$(a) \quad (pq)r = p(qr);$$

$$(b) \quad (p + q)r = pr + qr;$$

$$(c) \quad p(q + r) = pq + pr;$$

$$(d) \quad (cp)q = p(cq) = c(pq).$$

Note-se que, em geral, $p \times q \neq q \times p$, isto é, o produto vetorial não é comutativo, confirmando que a multiplicação de quaterniões não é comutativa.

Como \mathbb{H} é um espaço vetorial real e verifica as propriedades anteriores podemos concluir que \mathbb{H} é uma *álgebra real não comutativa*. Como a associatividade se verifica (propriedade (a) anterior), podemos dizer que a *álgebra dos quaterniões* é uma *álgebra associativa*.

Sabemos que $(\mathbb{H}, +)$ é um grupo abeliano, que $(\mathbb{H}, *)$ é um monóide (verifica as propriedades associativa e existência de elemento neutro, o quaternião identidade, que corresponde ao escalar 1) e que \mathbb{H} goza da propriedade distributiva de $*$ em relação a $+$. Por conseguinte, $(\mathbb{H}, +, *)$ é um *anel*.

3.1.3 Conjugado

Vamos designar por q^* o conjugado de q .

Definição 3.1.6 *Seja $q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$.*

O conjugado de q é $q^ = q_0 - \mathbf{q} = q_0 - \mathbf{i}q_1 - \mathbf{j}q_2 - \mathbf{k}q_3$.*

Facilmente se provam os seguintes resultados se atendermos à definição anterior.

Proposição 3.1.1 *Dados $p = p_0 + \mathbf{p} = p_0 + \mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3$, $q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 \in \mathbb{H}$, então*

$$(a) \quad (q^*)^* = q;$$

$$(b) \quad (p + q)^* = p^* + q^*;$$

$$(c) \quad (pq)^* = q^* p^*;$$

$$(d) \quad \Re(q^*) = \Re(q);$$

$$(e) \quad \Im(q^*) = \Im(-q);$$

$$(f) \quad q^* = q \iff q \in \mathbb{R} \iff q = \Re(q);$$

$$(g) \quad q^* = -q \iff q \in \mathcal{I}\mathbb{H} \iff q = \Im(q);$$

$$(h) \quad q^*q = qq^* = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2;$$

$$(i) \quad q + q^* = 2q_0 \iff q + q^* = 2\Re(q) \iff \Re(q) = \frac{q+q^*}{2};$$

$$(j) \quad q - q^* = 2\mathbf{q} \iff q - q^* = 2\Im(q) \iff \Im(q) = \frac{q-q^*}{2}.$$

A proposição seguinte é geometricamente fácil de provar.

Proposição 3.1.2 *Seja $q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 \in \mathbb{H}$. A função $f : q \mapsto q^*$ é uma reflexão na reta real \mathbb{R} identificada por q_0 , isto é, os pontos fixos da conjugação são os pontos da reta real $\Re(q)$.*

Realce-se que, se atendermos à propriedade (a) anterior, podemos afirmar que a função f da proposição anterior é uma *involução*.

3.1.4 Norma

Definição 3.1.7 *A norma de um quaterniões, $q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$, para a qual se usa a notação $N(q)$ ou $|q|$, que é também chamada comprimento ou módulo de q , é o escalar não negativo definido por [Dum11, p. 228]:*

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}. \quad (3.6)$$

Um quaterniões diz-se unitário se a sua norma for igual a 1.

Note-se que [Cas87, p. 24]

$$|q|^2 = q^*q = qq^* \quad (3.7)$$

e que

$$|q^*| = |q|. \quad (3.8)$$

Mostra-se, por indução, que a norma dum produto finito de quaterniões é o produto das normas dos quaterniões. Neste trabalho vamos mostrar apenas que a norma do produto de dois quaterniões p e q é o produto das suas normas.

Proposição 3.1.3 (Lei do módulo de Hamilton) *Sejam p e q dois quaterniões, então*

$$|pq| = |p| |q| .$$

Demonstração: Vejamos que

$$|pq|^2 = |p|^2 |q|^2 , \tag{3.9}$$

o que é equivalente ao que é pretendido. De facto,

$$\begin{aligned} |pq|^2 &= pq (pq)^* \\ &= pqq^* p^* \\ &= p |q|^2 p^* \\ &= pp^* |q|^2 \\ &= |p|^2 |q|^2 . \end{aligned}$$

■

A igualdade (3.9) também prova o resultado a seguir que já foi enunciado neste trabalho.

Teorema 3.1.1 (Teorema dos quatro quadrados) *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que a e b são a soma de quatro quadrados, então ab também é a soma de quatro quadrados.*

É evidente que, se os quaterniões p e q são quaterniões unitários, isto é, a sua norma é igual a 1, então o seu produto é também um quaternião unitário. Esta simples observação é importante, como veremos mais adiante.

Seja S^3 o conjunto de todos os quaterniões unitários [Kre08, p. 5], isto é,

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\} ,$$

que como realçamos é fechado para a multiplicação. O conjunto destes quaterniões estão sobre a esfera de raio 1 em \mathbb{R}^4 centrada na origem.

3.1.5 Inverso

Vamos designar por q^{-1} o inverso multiplicativo de q .

Definição 3.1.8 *Seja $q \in \mathbb{H}^*$, então q^{-1} é o inverso de q se e só se*

$$q^{-1}q = qq^{-1} = 1.$$

Vamos provar o resultado seguinte que surge naturalmente a partir da definição anterior e do resultado (3.7).

Proposição 3.1.4 *Seja $q \in \mathbb{H}^*$, então q tem inverso e tem-se*

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}.$$

Demonstração: Como

$$q \frac{q^*}{|q|^2} = \frac{qq^*}{|q|^2} = 1,$$

por (3.7), e analogamente,

$$\frac{q^*}{|q|^2} q = \frac{q^*q}{|q|^2} = 1,$$

resulta que q tem inverso e, como queríamos demonstrar, que

$$q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}.$$

■

Desta proposição decorre a seguinte.

Proposição 3.1.5 *Se $q \in S^3$, isto é, se $|q| = 1$, então*

$$q^{-1} = q^* \tag{3.10}$$

O resultado (3.10) é análogo nas matrizes de rotação, de que falaremos mais adiante neste trabalho, a saber, $A^{-1} = A^t$, onde A é uma matriz de rotação e A^{-1} e A^t representam, respetivamente, a inversa e a transposta da matriz A .

Se atendermos à proposição anterior e ao resultado (3.8), a prova da próxima proposição é direta.

Proposição 3.1.6 *Se $q \in S^3$, isto é, se $|q| = 1$, então*

$$|q| = |q^*| = |q^{-1}| = 1. \tag{3.11}$$

Podemos afirmar ainda que, como $(\mathbb{H}, *)$ é um monóide, $(\mathbb{H}^*, *)$ é também um monóide, visto ser fechado para a multiplicação. Além disso, todo o elemento de \mathbb{H}^* tem inverso, logo $(\mathbb{H}^*, *)$ é um *grupo*.

Temos também que, como \mathbb{H} é uma álgebra associativa, tem elemento neutro para a multiplicação e qualquer $q \in \mathbb{H}^*$ tem elemento inverso, então \mathbb{H} é uma *álgebra de divisão*.

Do mesmo modo, $(S^3, *)$ é fechado para a multiplicação como já referimos anteriormente, é um monóide porque $(\mathbb{H}, *)$ é um monóide e todo o elemento tem um inverso (se $q \in S^3$, então o seu inverso é igual ao conjugado por (3.10)). Então $(S^3, *)$ é um *grupo não abeliano*. Refira-se que na física quântica este grupo, que é muito importante, é denotado por $Sp(1)$ (de “*spin*”).

Seja

$$A = \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}.$$

É fácil verificar que $(A, *)$ é um grupo de ordem 8, a que se chama o *grupo dos quaterniões*. É evidente que o grupo dos quaterniões é um subgrupo de S^3 .

Seja S^2 o conjunto dos quaterniões puros e unitários, isto é,

$$S^2 = \mathcal{I}\mathbb{H} \cap S^3 = \{q \in \mathbb{H} : \Re(q) = 0 \wedge |q| = 1\}.$$

Este conjunto representa os pontos sobre uma esfera de raio igual a 1 contida em \mathbb{R}^3 .

Podemos mostrar que

$$q \in S^2 \iff q^2 = -1, \quad (3.12)$$

se atendermos às seguintes proposições que facilmente se provam.

Proposição 3.1.7 *Seja $q \in S^2$, então $q \cdot q = 1$, onde \cdot representa o produto interno, e $q^2 = -1$.*

Proposição 3.1.8 *Se $q^2 = -1$, então $|q| = 1$, $q^{-1} = -q = q^*$ e q é um quaterniões puro.*

É interessante referir que se atendermos à equivalência (3.12), o polinómio $x^2 + 1$ em \mathbb{H} tem um número infinito não numerável de zeros o que não acontece com os polinómios com coeficientes num corpo, em que o número de zeros é menor ou igual ao grau do polinómio respectivo.

3.1.6 Divisão

Há duas noções de divisão de quaterniões, à esquerda e à direita, uma vez que a multiplicação não é comutativa.

Definição 3.1.9 *Sejam $q \in \mathbb{H}$ e $p \in \mathbb{H}^*$. O resultado da divisão de q por p , à esquerda e à direita, é o quaterniões $p^{-1}q$ e qp^{-1} , respetivamente.*

Refira-se que a notação

$$\frac{p}{q}$$

não se usa a não ser que se tenha $p \in \mathbb{R}$ ou $q \in \mathbb{R}$.

3.1.7 Outras representações dos quaterniões

Tal como identificámos um número complexo como um par de números reais, também podemos pensar que um quaterniões é um par de números complexos (isto é, um elemento de \mathbb{C}^2) [Fen01, p. 291].

Assim, o quaterniões $q = a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d$ pode ser escrito na forma

$$q = z + w\mathbf{j},$$

onde $z = a + \mathbf{i}b$ e $w = c + \mathbf{i}d$, com $\{a, b, c, d\} \in \mathbb{R}$ e \mathbf{i}, \mathbf{j} e \mathbf{k} a satisfazer as condições (3.1) apresentadas na definição anterior. Note-se que, se efetuarmos os cálculos, se obtém de facto $q = a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d$.

Os quaterniões podem também ser representados como matrizes complexas de ordem 2 ou como matrizes reais de ordem 4. Nestes casos, a adição e multiplicação de quaterniões corresponde à adição e multiplicação de matrizes.

Note-se que, em *Lectures on Quaternions* (1858) Hamilton introduziu as matrizes, assim como Grassmann na obra *Cálculo Geométrico*. No entanto, foi Cayley que apresentou a definição de matriz e as suas propriedades fundamentais [Ros10, p. 57]. As matrizes complexas de ordem 2 foram introduzidas por Cayley em 1858 num artigo intitulado “*A memoir on the theory of matrices*”, onde os quaterniões são tratados como um caso particular das matrizes complexas 2×2 [Ebb91, p. 194].

Podemos, então, associar o quaterniões $q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 = z + w\mathbf{j}$, onde $z = q_0 + \mathbf{i}q_1$ e $w = q_2 + \mathbf{i}q_3$, à matriz

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 + \mathbf{i}q_1 & q_2 + \mathbf{i}q_3 \\ -q_2 + \mathbf{i}q_3 & q_0 - \mathbf{i}q_1 \end{pmatrix}.$$

Pode ver-se que \mathbb{H} é isomorfo ao conjunto

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\}$$

(*sub-álgebra* de $M_2(\mathbb{C})$) temos que as matrizes seguintes formam uma base de \mathbb{H} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Facilmente se demonstram os seguintes resultados.

Proposição 3.1.9 *Seja $A = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 + \mathbf{i}q_1 & q_2 + \mathbf{i}q_3 \\ -q_2 + \mathbf{i}q_3 & q_0 - \mathbf{i}q_1 \end{pmatrix}$ a representação matricial complexa do quaterniões q , então*

- (a) $|q|^2 = \det A$;
- (b) *Se $q_2 = q_3 = 0$, então a matriz A é diagonal;*
- (c) q^* *corresponde a $(A^*)^t$.*

A partir da representação como matriz complexa de ordem 2, obtém-se a representação como matriz real de ordem 4 associando a matriz

$$\begin{pmatrix} q_0 + \mathbf{i}q_1 & q_2 + \mathbf{i}q_3 \\ -q_2 + \mathbf{i}q_3 & q_0 - \mathbf{i}q_1 \end{pmatrix}$$

à matriz

$$\begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}.$$

Note-se que, a matriz real 4×4 se obtém da matriz complexa 2×2 , se substituirmos os números complexos pelas suas correspondentes matrizes reais.

Uma base de \mathbb{H} para esta representação é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vamos designar por \mathbb{H}^* o conjunto dos quaterniões não nulos, isto é,

$$\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}.$$

Há uma importante representação trigonométrica para os quaterniões de \mathbb{H}^* , que será utilizada ao longo deste trabalho e que é dada do seguinte modo. Seja $q = q_0 + \mathbf{q}$ ($q \in \mathbb{H}^*$), então, como

$$\left(\frac{q_0}{|q|}\right)^2 + \left(\frac{|\mathbf{q}|}{|q|}\right)^2 = 1,$$

tem-se que existe $\alpha \in [0, 2\pi[$ tal que $\cos \alpha = \frac{q_0}{|q|}$ e $\sin \alpha = \frac{|\mathbf{q}|}{|q|}$. Portanto

$$q = |q| \cos \alpha + \frac{|q| \sin \alpha}{|\mathbf{q}|} \mathbf{q} = |q| \left(\cos \alpha + \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} \sin \alpha \right).$$

Note-se que, se $\alpha = 0 \vee \alpha = \pi$, então o quaterniões q é real.

Refira-se que, a adição e multiplicação de quaterniões representados nesta forma se processa de acordo com a primeira definição de Hamilton.

3.2 Alguns resultados algébricos

Como sabemos, o conjunto dos quaterniões puros, $\mathcal{I}\mathbb{H}$, representa os quaterniões cuja parte real é zero, isto é, que podem ser tratados como vetores de \mathbb{R}^3 , pois existe uma correspondência biunívoca entre $\mathcal{I}\mathbb{H}$ e \mathbb{R}^3 , que a cada vetor $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ faz corresponder o quaterniões puro $q = 0 + \mathbf{q} \in \mathcal{I}\mathbb{H}$, ou seja,

$$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 \longleftrightarrow q = 0 + \mathbf{q} \in \mathcal{I}\mathbb{H} \subset \mathbb{H}.$$

Vejamos alguns resultados que envolvem quaterniões puros, começando por referir uma das suas definições.

Definição 3.2.1 *Seja $q \in \mathbb{H}$.*

$$q \in \mathcal{IH} \iff q^2 \in \mathbb{R} \wedge q \notin \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Facilmente se demonstra a proposição seguinte, se atendermos à definição anterior e ao facto de \mathcal{IH} ser fechado para a adição.

Proposição 3.2.1 *Se $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{IH}$, então*

$$\mathbf{pq} + \mathbf{qp} \in \mathbb{R}.$$

Também, facilmente, se demonstra usando os resultados (3.3) e (3.9) a

Proposição 3.2.2 *Sejam $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{IH}$. Então*

$$|\mathbf{p}|^2 |\mathbf{q}|^2 = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 + |\mathbf{p} \times \mathbf{q}|^2.$$

Os resultados seguintes verificam-se usando a fórmula de Olinde Rodrigues para a multiplicação de quaterniões puros (3.3) e a igualdade $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = -\mathbf{q} \times \mathbf{p}$.

Proposição 3.2.3 *Sejam $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathcal{IH}$. Então*

- (a) $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = \frac{1}{2}(\mathbf{pq} - \mathbf{qp})$;
- (b) $\mathbf{p} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\mathbf{pqr} - \mathbf{qrp})$;
- (c) $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{2}(\mathbf{pq}^* + \mathbf{qp}^*)$;
- (d) $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = -\frac{1}{2}(\mathbf{pq} + \mathbf{qp})$;
- (e) $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \Re(\mathbf{pq}^*) = \Re(\mathbf{p}^* \mathbf{q})$.

De (c) resulta:

Proposição 3.2.4 (Critério de ortogonalidade) *Sejam $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{IH}$. Então*

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0 \iff \mathbf{pq}^* \in \mathcal{IH}.$$

Se usarmos os resultados (b), (d) e $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = -\mathbf{q} \times \mathbf{p}$ também se provam as duas igualdades seguintes, sendo a primeira atribuída a Hermann Grassmann, cuja obra foi pioneira para o desenvolvimento da Análise Vetorial. A partir da igualdade de Grassmman obtém-se a igualdade de Carl Jacobi que é conhecido pelo seu trabalho em Funções Elíticas [CG96, p. 207].

Proposição 3.2.5 (Igualdade de Grassmman) *Sejam $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathcal{IH}$. Então*

$$\mathbf{p} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{q} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{r}. \quad (3.13)$$

Proposição 3.2.6 *Sejam $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathcal{IH}$. Então*

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \times \mathbf{r} = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{p}. \quad (3.14)$$

Proposição 3.2.7 (Igualdade de Jacobi) *Sejam $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathcal{IH}$. Então*

$$\mathbf{p} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{r}) + \mathbf{q} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) + \mathbf{r} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = 0. \quad (3.15)$$

Definição 3.2.2 *Seja $q = |q|(\cos \alpha + \mathbf{v} \sin \alpha)$ não real, onde $\mathbf{v}^2 = -1$, isto é, $\mathbf{v} \in S^2$. Denota-se por \mathbb{C}_q o sub-espaco de dimensão 2 de \mathbb{R}^4 gerado por 1 e \mathbf{v} , ou seja, $\mathbb{C}_q = \langle 1, \mathbf{v} \rangle$.*

Proposição 3.2.8 *Para cada quaternião não real $q = |q|(\cos \alpha + \mathbf{v} \sin \alpha)$ tal que $\mathbf{v}^2 = -1$, temos que \mathbb{C}_q é isomorfo ao conjunto dos números complexos \mathbb{C} pela correspondência*

$$x + \mathbf{i}y \longleftrightarrow x + \mathbf{v}y.$$

Definição 3.2.3 *Sejam $p, q \in \mathbb{H}$. O comutador de p e q define-se da seguinte forma:*

$$[p, q] = pq - qp.$$

É evidente que:

$$[p, q] = 0 \iff p, q \text{ comutam.}$$

Facilmente se prova que $[p, q]$ é um quaternião puro e consequentemente

$$[p, q]^* = -[p, q].$$

Também se deduz a seguinte equivalência.

Proposição 3.2.9 *Sejam $p, q \in \mathbb{H}$.*

$$p, q \text{ comutam} \iff p \in \mathbb{R} \vee q \in \mathbb{R} \vee q \in \mathbb{C}_p.$$

Para finalizar, vamos referir a partir da definição de *centro* de \mathbb{H} , alguns resultados que utilizaremos neste trabalho [Art88, p. 105].

Definição 3.2.4 *O centro de $\mathbb{H} = \{q \in \mathbb{H} : \forall p \in \mathbb{H} \quad qp = pq\}$.*

Facilmente se prova o

Teorema 3.2.1 *O centro de $\mathbb{H} = \mathbb{R}$.*

O teorema anterior sugere o seguinte

Corolário 3.2.1.1 *Seja $q \in S^3$ tal que $qp = pq$, para qualquer $p \in \mathbb{H}$. Então*

$$q = 1 \quad \vee \quad q = -1.$$

Capítulo 4

Rotações em \mathbb{R}^3

As rotações em \mathbb{R}^3 podem ser definidas a partir de matrizes, ângulos de Euler, eixo-ângulo e quaterniões. Vamos ver de que forma estas quatro representações identificam uma rotação.

4.1 Matrizes de rotação

Vamos estudar rotações de \mathbb{R}^3 recorrendo a matrizes, começando por distinguir *rotações do referencial* e *rotações de um ponto de \mathbb{R}^3* .

Rotação do referencial

Vamos usar a notação $R_{\alpha}^{\mathbf{v}}$ para representar a rotação do referencial em torno do eixo \mathbf{v} segundo o ângulo α , e sendo a correspondente matriz denotada por $R_{\mathbf{v},\alpha}$. Numa rotação do *referencial* em \mathbb{R}^3 , precisamos pois de conhecer o ângulo de rotação e o eixo em torno do qual o referencial vai rodar.

Por exemplo, se rodarmos o referencial \mathbf{XYZ} em torno do eixo dos $\mathbf{Z}'s$ segundo o ângulo ψ , é fácil entender que a coordenada z de um ponto $P = (x_1, y_1, z_1)$ se vai manter inalterada. Esta situação poderá traduzir-se como uma rotação em \mathbb{R}^2 do sistema de eixos coordenados \mathbf{XY} em torno da origem segundo o ângulo ψ , isto é, as

novas coordenadas do ponto P são

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \cos \psi + y_1 \sin \psi + 0.z_1 \\ y_2 = -x_1 \sin \psi + y_1 \cos \psi + 0.z_1 \\ z_2 = 0.x_1 + 0.y_1 + 1.z_1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

A matriz desta rotação, isto é, a matriz associada à rotação do referencial \mathbf{XYZ} (em \mathbb{R}^3) em torno do eixo dos $\mathbf{Z}'s$ e de ângulo ψ é pois

$$R_{z,\psi} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Do mesmo modo as matrizes associadas às rotações do referencial \mathbf{XYZ} (em \mathbb{R}^3) em torno do eixo dos $\mathbf{X}'s$ de ângulo θ e em torno do eixo dos $\mathbf{Y}'s$ de ângulo α são, respetivamente,

$$R_{x,\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

e

$$R_{y,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Rotação do ponto

Vamos usar as notações $(R_\alpha^v)'$ para representar a rotação de um ponto de \mathbb{R}^3 em torno do eixo \mathbf{v} segundo o ângulo α e a correspondente matriz por $R'_{v,\alpha}$. Numa rotação *de um ponto* em \mathbb{R}^3 , precisamos, assim, de conhecer o ângulo de rotação e o eixo em torno do qual o ponto vai rodar.

Por exemplo, se rodarmos o ponto $P = (x_1, y_1, z_1)$ em torno do eixo dos $\mathbf{Z}'s$

segundo o ângulo ψ positivo, vamos obter novas coordenadas de P, a saber

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \cos \psi - y_1 \sin \psi + 0 \cdot z_1 \\ y_2 = x_1 \sin \psi + y_1 \cos \psi + 0 \cdot z_1 \\ z_2 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 + 1 \cdot z_1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

A matriz associada à rotação de P (em \mathbb{R}^3) em torno do eixo dos $\mathbf{Z}'s$ e de ângulo ψ é

$$R'_{z,\psi} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Do mesmo modo, as matrizes associadas às rotações do ponto P (em \mathbb{R}^3) em torno do eixo dos $\mathbf{X}'s$ de ângulo θ e em torno do eixo dos $\mathbf{Y}'s$ de ângulo α são, respetivamente,

$$R'_{x,\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

e

$$R'_{y,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}.$$

4.1.1 Alguns resultados clássicos sobre matrizes de rotação

Vamos referir alguns resultados bem conhecidos sobre rotações e matrizes de rotação.

É fácil verificar que a matriz $R_{z,\psi}$ (associada à rotação do referencial \mathbf{XYZ} , de ângulo positivo ψ em torno do eixo dos $\mathbf{Z}'s$) é a *transposta* e a *inversa* da matriz de rotação $R'_{z,\psi}$ (associada à rotação de um ponto, de ângulo positivo ψ em torno do eixo

dos $\mathbf{Z}'s$), isto é,

$$R_{z,\psi} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = (R'_{z,\psi})^t$$

e

$$R_{z,\psi} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (R'_{z,\psi})^{-1}.$$

Usando a mesma notação podemos também concluir que

$$R_{x,\theta} = (R'_{x,\theta})^t = (R'_{x,\theta})^{-1}, \quad R_{y,\alpha} = (R'_{y,\alpha})^t = (R'_{y,\alpha})^{-1}$$

e que

$$R'_{z,\psi} = R_{z,\psi}^t = R_{z,\psi}^{-1}, \quad R'_{x,\theta} = R_{x,\theta}^t = R_{x,\theta}^{-1} \quad \text{e} \quad R'_{y,\alpha} = R_{y,\alpha}^t = R_{y,\alpha}^{-1}.$$

Lembramos que

Definição 4.1.1 *Uma matriz A é ortogonal se e só se*

$$A^t A = A A^t = I,$$

onde I representa a matriz identidade.

Como a transposta e inversa das matrizes de rotação estudadas acima coincidem, podemos concluir que elas são ortogonais. Podemos ver, ainda, que o determinante destas matrizes é igual a 1.

A apresentação da demonstração da proposição seguinte encontra-se em [Kui02, p. 53].

Proposição 4.1.1 *Uma matriz 3×3 é uma matriz de rotação em \mathbb{R}^3 se e somente se a matriz é ortogonal e o seu determinante é igual a 1.*

A prova desta equivalência recorre à proposição seguinte.

Proposição 4.1.2 *Se o comprimento de vetores e o ângulo entre vetores é mantido numa rotação, então o produto interno de dois vetores, $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$, não muda com a rotação, logo é invariante para a rotação.*

Podemos ainda referir que:

Proposição 4.1.3 *A transposta e a inversa de uma matriz de rotação são iguais.*

Identifique-se por $SO(3)$ o conjunto de todas as matrizes de ordem 3 que são ortogonais e cujo determinante é 1, isto é, o conjunto das matrizes de rotação em \mathbb{R}^3 .

O conjunto $SO(3) = \{A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) : A \text{ é ortogonal e } \det A = 1\}$ munido com a operação de multiplicação de matrizes é um grupo.

Vamos referir mais alguns resultados importantes que envolvem matrizes de rotação em \mathbb{R}^3 .

Proposição 4.1.4 *A rotação do **referencial** segundo um ângulo ψ é equivalente à rotação de um **ponto** segundo o ângulo $-\psi$ em torno do mesmo eixo e, a rotação de um **ponto** segundo um ângulo ψ é equivalente à rotação do **referencial** em torno do mesmo eixo segundo o ângulo $-\psi$.*

Por exemplo,

$$R_{z,\psi} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R'_{z,-\psi} = \begin{pmatrix} \cos(-\psi) & -\sin(-\psi) & 0 \\ \sin(-\psi) & \cos(-\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$R'_{z,\psi} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_{z,-\psi} = \begin{pmatrix} \cos(-\psi) & \sin(-\psi) & 0 \\ -\sin(-\psi) & \cos(-\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposição 4.1.5 *A inversa de uma rotação de ângulo ψ , é uma rotação em torno do mesmo eixo segundo o ângulo $-\psi$.*

Podemos dar o seguinte exemplo

$$R_{z,\psi}^{-1} = R'_{z,\psi} = R_{z,-\psi}.$$

Proposição 4.1.6 *Numa rotação, qualquer ponto sobre o eixo de rotação em que este contém a origem do referencial, é invariante para a rotação.*

Proposição 4.1.7 *O plano que passa pela origem do referencial e é perpendicular ao eixo de rotação que também contém a origem, roda sobre si mesmo, isto é, pela ação de uma rotação será enviado em si mesmo.*

Note-se que qualquer vetor que pertença ao plano referido na proposição anterior, após a rotação será enviado num vetor que ainda pertence a este plano.

Proposição 4.1.8 *A composta de duas rotações em \mathbb{R}^3 em torno do mesmo eixo irá corresponder a uma rotação em torno desse mesmo eixo e cujo ângulo de rotação é a soma dos ângulos de cada uma das rotações.*

Podemos exemplificar com a matriz associada à composição de duas rotações do referencial \mathbf{XYZ} , em torno do eixo dos \mathbf{Z}' s, de ângulos α e β , respetivamente. A matriz composta destas rotações é

$$R_{z,\alpha+\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mais geralmente:

Proposição 4.1.9 *A composta de duas rotações em \mathbb{R}^3 é uma rotação, isto é, o produto de duas matrizes de rotação é uma matriz de rotação.*

A prova deste resultado deriva das duas proposições seguintes e da proposição 4.1.1:

Proposição 4.1.10 *Sejam A e B matrizes de ordem 3×3 com entradas reais. Se $\det A = 1$ e $\det B = 1$, então $\det(AB) = 1$.*

Proposição 4.1.11 *Sejam A e B matrizes de ordem 3×3 com entradas reais. Se A é ortogonal e B é ortogonal, então AB é ortogonal.*

4.1.2 Operador matricial de rotação

Já referimos que uma rotação em \mathbb{R}^3 pode ser representada por uma matriz 3×3 , ortogonal e cujo determinante é igual a 1.

Proposição 4.1.12 *Dada uma matriz A de rotação de ordem 3, existe um operador linear*

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}, \quad \text{com } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Para encontrar o vetor \mathbf{w} que será imagem do vetor \mathbf{v} pela rotação, basta representar o vetor \mathbf{v} por uma matriz coluna e multiplicar pela matriz rotação pelo lado esquerdo.

Assim, dada uma matriz de rotação A , basta resolver a equação

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = A\mathbf{v} &\iff \\ \iff \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos, então considerar a matriz A , que representa a rotação, como o operador matricial de rotação.

4.2 Quaterniões e rotações

Hamilton descobriu os quaterniões quando procurava um produto de ternos que, à semelhança do produto de complexos, que representa uma rotação no plano \mathbb{R}^2 , pudesse representar uma rotação no espaço de dimensão 3. Note-se que, o quaternião tem quatro elementos enquanto que uma matriz de rotação tem nove, sendo esta uma das vantagens de se utilizar quaterniões em vez de matrizes para representar uma rotação. Nesta secção vamos mostrar de que forma o produto de quaterniões representa uma rotação em \mathbb{R}^3 .

4.2.1 Operador quaterniônico de rotação

Para determinar o operador quaterniônico de rotação temos de pensar que um vetor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ pode ser tratado simplesmente como um quaternião $p \in \mathbb{H}$ cuja parte real é zero, isto é, p é um quaternião puro. De facto, já referimos neste trabalho que \mathcal{IH} e \mathbb{R}^3 são isomorfos.

Tal como aconteceu nas matrizes de rotação, poderíamos supor que o operador rotacional que é definido em termos de quaterniões teria a mesma forma que a matriz do operador rotacional. Logo, para encontrar o vetor \mathbf{s} que seria imagem do vetor \mathbf{p} pela rotação, bastaria multiplicar o vetor \mathbf{p} por um quaternião pelo lado esquerdo. Ou seja, um quaternião $q \in \mathbb{H}$ representaria uma rotação e para determinar o vetor $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3$ imagem do vetor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, bastaria apenas realizar o produto

$$\mathbf{s} = q\mathbf{p}. \quad (4.1)$$

No entanto, se substituirmos o vetor \mathbf{p} na equação e realizarmos o produto $q\mathbf{p}$ verificamos que, em geral, o resultado não corresponde a um vetor em \mathbb{R}^3 . É evidente que o produto $\mathbf{p}q$ também não resultará, pois se comutarmos os fatores, a parte real deste produto não se vai alterar. Conclui-se, assim, que o operador quaterniônico de uma rotação não consiste apenas de um único quaternião.

Vamos ver que o operador quaterniônico envolve produtos triplos. Este produto vai enviar um vetor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, isto é, um quaternião puro $p = 0 + \mathbf{p} \in \mathcal{IH}$, noutro quaternião puro.

Sejam q e r dois quaterniões quaisquer e $\mathbf{p} \in \mathcal{IH}$, representando algum vetor. Existem seis possíveis produtos entre estes três quaterniões que são:

$$\mathbf{p}qr; \quad \mathbf{p}rq; \quad r\mathbf{p}q; \quad rqp; \quad q\mathbf{p}r; \quad qr\mathbf{p}.$$

Como \mathbb{H} é fechado para a multiplicação, temos que os produtos qr e rq são quaterniões, o que significa que os quatro produtos

$$\mathbf{p}qr; \quad \mathbf{p}rq; \quad rqp; \quad \text{e} \quad qr\mathbf{p}$$

são apenas produtos da forma (4.1), logo não podem representar o operador quaterniônico. Como não distinguimos os quaterniões q e r um do outro, também não vamos distinguir os restantes produtos $q\mathbf{p}r$ e $r\mathbf{p}q$.

Vamos usar a fórmula de Olinde Rodrigues (3.2) para a multiplicação de quaterniões e efetuar o produto qpr .

Seja $q = q_0 + \mathbf{q}$, $p = 0 + \mathbf{p}$ e $r = r_0 + \mathbf{r}$, então

$$\begin{aligned} qpr &= (q_0 + \mathbf{q})(0 + \mathbf{p})(r_0 + \mathbf{r}) \\ &= [-\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{q} \times \mathbf{p}](r_0 + \mathbf{r}) \\ &= -r_0(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) - (q_0\mathbf{p} + \mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})\mathbf{r} + \\ &+ r_0(q_0\mathbf{p} + \mathbf{q} \times \mathbf{p}) + (q_0\mathbf{p} + \mathbf{q} \times \mathbf{p}) \times \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Para que o operador quaterniônico envie um quaternião puro num outro quaternião puro, temos que igualar a parte real do produto anterior a zero, isto é,

$$-r_0(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) - q_0(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r} = 0,$$

o que equivale a

$$-r_0(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) - q_0(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) + (\mathbf{q} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{p} = 0.$$

Para obter esta última igualdade, é suficiente que se tenha $r_0 = q_0$ e $\mathbf{r} = -\mathbf{q}$. Neste caso

$$r = r_0 + \mathbf{r} = q_0 - \mathbf{q} = q^*,$$

logo,

$$q = r^*.$$

Obtemos, assim, que os produtos triplos quaterniônicos

$$qpq^* \quad \text{e} \quad q^*pq.$$

produzem um quaternião puro sempre que p é um quaternião puro.

Podemos então concluir que, dado um vetor \mathbf{v} de \mathbb{R}^3 , então temos dois possíveis operadores quaterniônicos que são definidos por:

$$\mathbf{w}_1 = q\mathbf{v}q^* \tag{4.2}$$

e

$$\mathbf{w}_2 = q^*\mathbf{v}q. \tag{4.3}$$

A partir de agora, consideramos que o quaternião q usado para definir o operador é sempre de norma igual a 1. Mais à frente, ver-se-á a relevância desta restrição.

Antes de provar que qualquer rotação pode ser definida por um destes operadores, vejamos outra maneira de representar estes operadores quaterniônicos. Começemos pelo operador $\mathbf{w} = q^* \mathbf{v} q$.

Sejam $q = q_0 + \mathbf{q}$ um quaternião unitário e \mathbf{v} o vetor representado pelo quaternião puro $v = 0 + \mathbf{v}$. Então

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= q^* \mathbf{v} q \\ &= (q_0 - \mathbf{q})(0 + \mathbf{v})(q_0 + \mathbf{q}) \\ &= (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{q} + q_0^2 \mathbf{v} - 2q_0 (\mathbf{q} \times \mathbf{v}) - (\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{q}. \end{aligned}$$

Se utilizarmos a igualdade (3.14), podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{q} + q_0^2 \mathbf{v} - 2q_0 (\mathbf{q} \times \mathbf{v}) - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{q} = \\ &= (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2) \mathbf{v} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{q} - 2q_0 (\mathbf{q} \times \mathbf{v}) = \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$= (2q_0^2 - 1) \mathbf{v} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{q} - 2q_0 (\mathbf{q} \times \mathbf{v}). \quad (4.5)$$

De modo análogo, verifica-se que para o outro operador se tem

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= q \mathbf{v} q^* = \\ &= (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2) \mathbf{v} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{q} + 2q_0 (\mathbf{q} \times \mathbf{v}) = \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$= (2q_0^2 - 1) \mathbf{v} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{q} + 2q_0 (\mathbf{q} \times \mathbf{v}). \quad (4.7)$$

Vamos ver, agora, que os operadores quaterniônicos obtidos anteriormente são operadores lineares de rotação.

Teorema 4.2.1 *Sejam $q = q_0 + \mathbf{q} = \cos \theta + \mathbf{u} \sin \theta$ um quaternião unitário, onde $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. A ação do operador*

$$L_q(\mathbf{v}) = q \mathbf{v} q^* \quad (4.8)$$

em \mathbf{v} pode ser interpretado geometricamente como a rotação do vetor \mathbf{v} em torno de \mathbf{q} como eixo de rotação e segundo o ângulo 2θ .

Como esta prova é longa, vamos dividi-la, seguidamente em três lemas.

Lema 4.2.1 *O operador $L_q(\mathbf{v}) = q \mathbf{v} q^*$ é linear.*

Demonstração: Dados dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} de \mathbb{R}^3 , k um número real e q um quaterniño unitário, então

$$\begin{aligned} L_q(k\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= q(k\mathbf{a} + \mathbf{b})q^* \\ &= (qk\mathbf{a} + q\mathbf{b})q^* \\ &= kqaq^* + qbq^* \\ &= kL_q(\mathbf{a}) + L_q(\mathbf{b}). \end{aligned}$$

■

Lema 4.2.2 *Seja q um quaterniño unitário. A norma de um vetor de \mathbb{R}^3 não se altera com a aplicação do operador $L_q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}q^*$.*

Demonstração: Sejam \mathbf{v} um vetor de \mathbb{R}^3 e q um quaterniño unitário. Então

$$|L_q(\mathbf{v})| = |q\mathbf{v}q^*| = |q| |\mathbf{v}| |q^*| = |\mathbf{v}|.$$

■

Este último resultado representa uma das propriedades de uma rotação. Nesta altura, já se percebe a razão porque se considera o quaterniño q como unitário.

Lema 4.2.3 *O operador quaterniónico $L_q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}q^*$ representa uma rotação.*

Demonstração: Consideremos $q = q_0 + \mathbf{q} = \cos \theta + \mathbf{u} \sin \theta$ um quaterniño unitário, onde $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e, seguidamente, divididamos \mathbf{v} em duas componentes ortogonais: a componente \mathbf{a} com a direção de \mathbf{q} , isto é, $\mathbf{a} = k\mathbf{q}$ para algum escalar k e a componente \mathbf{n} normal ao vetor \mathbf{q} .

Comecemos por verificar que o vetor

$$\mathbf{a} = k\mathbf{q} \text{ vai manter-se inalterado por } L_q.$$

Se usarmos a representação (4.6), temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= q(k\mathbf{q})q^* \\ &= (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2)k\mathbf{q} + 2(\mathbf{q} \cdot k\mathbf{q})\mathbf{q} \\ &= kq_0^2\mathbf{q} + k|\mathbf{q}|^2\mathbf{q} \\ &= k(q_0^2 + |\mathbf{q}|^2)\mathbf{q} \\ &= k\mathbf{q} \end{aligned} \quad \text{c. q. d.}$$

Este resultado mostra que \mathbf{q} poderá ser o eixo de rotação. Para terminar a demonstração, basta provar agora, que a componente

\mathbf{n} vai rodar em torno de \mathbf{q} (eixo de rotação) segundo o ângulo 2θ .

A partir da igualdade (4.6), temos que

$$L_q(\mathbf{n}) = (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2) \mathbf{n} + 2q_0 (\mathbf{q} \times \mathbf{n}).$$

Sabemos que $\mathbf{q} = |\mathbf{q}| \mathbf{u}$ então podemos escrever

$$L_q(\mathbf{n}) = (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2) \mathbf{n} + 2q_0 |\mathbf{q}| (\mathbf{u} \times \mathbf{n}).$$

Seja $\mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{n}_\perp$, então

$$L_q(\mathbf{n}) = (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2) \mathbf{n} + 2q_0 |\mathbf{q}| \mathbf{n}_\perp. \quad (4.9)$$

Os vetores \mathbf{n} e \mathbf{n}_\perp têm a mesma norma. De facto,

$$|\mathbf{n}_\perp| = |\mathbf{u} \times \mathbf{n}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{n}| \sin \frac{\pi}{2} = |\mathbf{n}|.$$

Finalmente, se usarmos a representação trigonométrica do quaternião q e substituirmos em (4.9) obtemos

$$L_q(\mathbf{n}) = (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \mathbf{n} + (2 \cos \theta \sin \theta) \mathbf{n}_\perp, \quad (4.10)$$

em virtude de $q_0 = \cos \theta$, $\mathbf{q} = \mathbf{u} \sin \theta$, $|\mathbf{q}| = \sin \theta$ e $|\mathbf{u}| = 1$.

A igualdade (4.10) pode ser escrita, ainda, na forma

$$L_q(\mathbf{n}) = \cos(2\theta) \mathbf{n} + \sin(2\theta) \mathbf{n}_\perp.$$

Vimos, então, que

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= q\mathbf{v}q^* \\ &= L_q(\mathbf{v}) \\ &= L_q(\mathbf{a} + \mathbf{n}) \\ &= L_q(\mathbf{a}) + L_q(\mathbf{n}) \\ &= \mathbf{a} + \mathbf{m}, \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{m} = L_q(\mathbf{n}) = \cos(2\theta)\mathbf{n} + \sin(2\theta)\mathbf{n}_\perp.$$

Prova-se com facilidade que $|\mathbf{m}| = |\mathbf{n}| = |\mathbf{n}_\perp|$. De facto,

$$\begin{aligned} |\mathbf{m}|^2 &= \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} \\ &= (\cos(2\theta)\mathbf{n} + \sin(2\theta)\mathbf{n}_\perp) \cdot (\cos(2\theta)\mathbf{n} + \sin(2\theta)\mathbf{n}_\perp) \\ &= (\cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta))|\mathbf{n}|^2 \\ &= |\mathbf{n}|^2 = |\mathbf{n}_\perp|^2. \end{aligned}$$

Donde, $|\mathbf{m}| = |\mathbf{n}| = |\mathbf{n}_\perp|$.

A representação do vetor rodado \mathbf{m} e das suas componentes estão representados na figura 4.1.

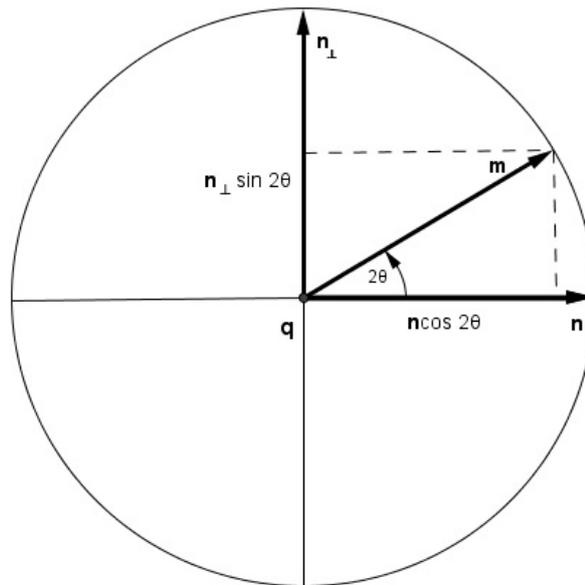


Figura 4.1: Componentes do vetor \mathbf{m}

[Imagem realizada no programa Geogebra]

Conclui-se, assim, que os vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} podem ser vistos geometricamente como geratrizes de um cone cujo eixo é o vetor \mathbf{q} e cuja base circular contém os vetores \mathbf{n} e \mathbf{m} . A figura 4.2 ilustra a rotação do vetor \mathbf{v} pelo operador quaterniônico de rotação L_q . ■

Note-se que, se substituirmos num dos operadores q por q^* , vamos obter o outro

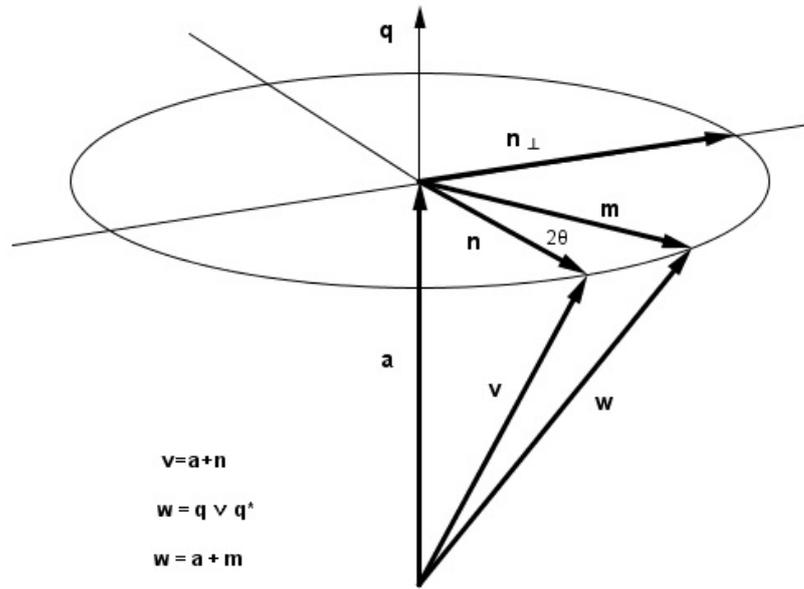


Figura 4.2: Representação geométrica da rotação
 [Imagem realizada no programa Geogebra]

operador. Facilmente, também, se verifica que

$$L_{q^*}(\mathbf{v}) = \mathbf{a} + \cos(2\theta)\mathbf{n} - \sin(2\theta)\mathbf{n}_\perp,$$

ou seja,

$$L_{q^*}(\mathbf{v}) = \mathbf{a} + \cos(-2\theta)\mathbf{n} + \sin(-2\theta)\mathbf{n}_\perp.$$

Se atendermos à proposição 4.1.5, podemos concluir que as rotações representadas pelos operadores L_q e L_{q^*} estão relacionados com a perspectiva do observador, uma vez que representam rotações inversas. Vamos considerar neste trabalho que o operador $L_q(\mathbf{v}) = \mathbf{q}\mathbf{v}\mathbf{q}^*$ representa uma rotação de um ponto e o operador $L_{q^*}(\mathbf{v}) = \mathbf{q}^*\mathbf{v}\mathbf{q}$ uma rotação do referencial.

Podemos, então, enunciar o

Teorema 4.2.2 *Sejam $\mathbf{q} = q_0 + \mathbf{q} = \cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta$ um quaterniño unitário, onde $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. A ação do operador*

$$L_{q^*}(\mathbf{v}) = \mathbf{q}^*\mathbf{v}\mathbf{q} \tag{4.11}$$

em \mathbf{v} pode ser interpretado geometricamente como a rotação do referencial com respeito ao vetor \mathbf{v} em torno de \mathbf{q} como eixo de rotação e segundo o ângulo 2θ .

4.2.2 Composição de operadores quaterniônicos de rotação

Nas aplicações que vão ser estudadas, vamos trabalhar com a composição de operadores quaterniônicos de rotação. Seguidamente, vamos ver de que forma se define o operador da composta de rotações. Saliente-se que, a partir de agora, para não sobrecarregar a notação, vamos representar ambos os operadores por L_q , fazendo a distinção a seguir, isto é, $L_q(\mathbf{v}) = q^*\mathbf{v}q$ representa a rotação do referencial (pontos fixos) e $L_q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}q^*$ representa a rotação do ponto (referencial fixo).

Teorema 4.2.3 *Sejam p e q quaterniões unitários que definem, respetivamente, os operadores quaterniônicos de rotação*

$$L_p(\mathbf{u}) = p^*\mathbf{u}p \quad e \quad L_q(\mathbf{v}) = q^*\mathbf{v}q.$$

Então o produto quaterniônico pq define o operador quaterniônico de rotação L_{pq} que representa a composição dos operadores L_p seguido de L_q , ou seja, $L_q \circ L_p$. O eixo e o ângulo da rotação são aqueles representados pelo produto quaterniônico pq .

Demonstração: Seja \mathbf{u} um vetor de \mathbb{R}^3 . Então

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= (L_q \circ L_p)(\mathbf{u}) \\ &= L_q(p^*\mathbf{u}p) \\ &= q^*(p^*\mathbf{u}p)q \\ &= q^*p^*\mathbf{u}pq \\ &= (pq)^*\mathbf{u}pq \\ &= L_{pq}(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Como p e q são quaterniões unitários, pq também é unitário. Concluimos, assim, que L_{pq} é um operador quaterniônico de rotação com eixo e ângulo da rotação representados pelo produto quaterniônico pq . ■

De modo análogo se demonstra o

Teorema 4.2.4 *Sejam p e q quaterniões unitários que definem, respetivamente, os operadores quaterniônicos de rotação*

$$L_p(\mathbf{u}) = p\mathbf{u}p^* \quad e \quad L_q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}q^*.$$

Então o produto quaterniônico qp define o operador quaterniônico de rotação L_{qp} que representa a composição dos operadores L_p seguido de L_q , ou seja, $L_q \circ L_p$. O eixo e o ângulo da rotação são aqueles representados pelo produto quaterniônico qp .

Vamos ver, agora, o resultado do produto de p por q , quando p e q são da forma

$$p = \cos \alpha + \mathbf{u} \sin \alpha \quad \text{e} \quad q = \cos \beta + \mathbf{u} \sin \beta.$$

Note-se que, aos quaterniões unitários p e q , estão associados o mesmo vetor \mathbf{u} .

Aplicando a fórmula de Olinde Rodrigues (3.2), vem que

$$\begin{aligned} pq &= (\cos \alpha + \mathbf{u} \sin \alpha) (\cos \beta + \mathbf{u} \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - (\mathbf{u} \sin \alpha) \cdot (\mathbf{u} \sin \beta) + \\ &+ \mathbf{u} \cos \alpha \sin \beta + \mathbf{u} \sin \alpha \cos \beta + (\mathbf{u} \sin \alpha) \times (\mathbf{u} \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + \mathbf{u} (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \\ &= \cos (\alpha + \beta) + \mathbf{u} \sin (\alpha + \beta) \\ &= \cos \gamma + \mathbf{u} \sin \gamma. \end{aligned}$$

Concluimos que o produto de dois quaterniões unitários p e q é um quaternião unitário cujo ângulo é a soma dos ângulos de p e de q ($\gamma = \alpha + \beta$) e o vetor associado é o mesmo de p e q (\mathbf{u}). É claro que o ângulo da rotação que está definido por pq é 2γ . Este resultado confirma a proposição 4.1.8.

Realcem-se as proposições seguintes [Par12, p. 59].

Proposição 4.2.1 *Seja q um quaternião unitário associado ao operador quaterniônico de rotação $L_q(\mathbf{v}) = q^* \mathbf{v} q$. Então*

$$L_q(L_{q^{-1}}(\mathbf{v})) = \mathbf{v} \quad \text{e} \quad L_{q^{-1}}(L_q(\mathbf{v})) = \mathbf{v}.$$

Demonstração:

$$L_q(L_{q^{-1}}(\mathbf{v})) = L_{q^{-1}q}(\mathbf{v}) = 1^* \mathbf{v} 1 = \mathbf{v}$$

e

$$L_{q^{-1}}(L_q(\mathbf{v})) = L_{qq^{-1}}(\mathbf{v}) = 1^* \mathbf{v} 1 = \mathbf{v}.$$

■

Proposição 4.2.2 *Seja q um quaterniônio unitário associado ao operador quaterniônico de rotação $L_q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}q^*$. Então*

$$L_{q^{-1}}(L_q(\mathbf{v})) = \mathbf{v} \quad \text{e} \quad L_q(L_{q^{-1}}(\mathbf{v})) = \mathbf{v}.$$

Demonstração: É inteiramente análoga à anterior ■

Fica assim visto que $L_q^{-1} = L_{q^{-1}}$.

4.2.3 Alguns resultados relevantes sobre quaterniões

Vejamus que a correspondência entre os quaterniões unitários e as rotações não é biunívoca.

Proposição 4.2.3 *Os quaterniões unitários q e $-q$ definem a mesma rotação.*

Demonstração: Seja $q \in S^3$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Então

$$\mathbf{w} = q^*\mathbf{v}q = (-q)^*\mathbf{v}(-q)$$

e da mesma maneira

$$\mathbf{w} = q\mathbf{v}q^* = (-q)\mathbf{v}(-q)^*.$$

■

Vamos provar, ainda, as seguintes proposições.

Proposição 4.2.4 *O quaterniônio unitário*

$$q = \cos \frac{\alpha}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (\mathbf{u} \in S^2)$$

pode ser caracterizado por qualquer um dos dois pares (\mathbf{u}, α) , $(-\mathbf{u}, -\alpha)$.

Demonstração: Seja $q = \cos \frac{\alpha}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\alpha}{2} \in S^3$. Então

$$q = \cos \frac{\alpha}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \left(-\frac{\alpha}{2}\right) + (-\mathbf{u}) \sin \left(-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Por outro lado, é fácil ver que

$$\cos \left(\frac{\alpha}{2}\right) + \mathbf{u} \sin \left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos \left(\frac{\beta}{2}\right) + \mathbf{v} \sin \left(\frac{\beta}{2}\right) \Rightarrow \alpha = \pm\beta \wedge \mathbf{u} = \pm\mathbf{v},$$

respetivamente ■

Proposição 4.2.5 *O quaterniônio unitário*

$$q^{-1} = q^* = \cos \frac{\alpha}{2} + (-\mathbf{u}) \sin \frac{\alpha}{2} \quad (\mathbf{u} \in S^2)$$

pode ser caracterizado pelo par $(-\mathbf{u}, \alpha)$ ou pelo par $(\mathbf{u}, -\alpha)$.

Demonstração: Inteiramente análoga à anterior. ■

Daqui concluímos que existe um homomorfismo, f , entre os grupos S^3 e $SO(3)$. Como para $q = \pm 1$, os operadores quaterniônicos de rotação representam a identidade, temos que o núcleo do homomorfismo f é

$$\ker f = \{1, -1\}.$$

Como consequência, os grupos

$$S^3 / \{\pm 1\} \text{ e } SO(3)$$

são isomorfos [Rêg04, p. 38–39].

4.2.4 O eixo e o ângulo de uma rotação dada por um quaterniônio

Vamos determinar o ângulo e o eixo de uma rotação que é dada por um quaterniônio que a determina, estando este representado de duas maneiras, a de Hamilton e a trigonométrica.

Seja $q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$ um quaterniônio unitário que define uma certa rotação. Para determinar o ângulo da rotação, ψ , basta resolver a equação

$$\cos \frac{\psi}{2} = q_0$$

em função de ψ , isto é,

$$\psi = 2 \arccos(q_0). \quad (4.12)$$

O eixo da rotação é representado pelo vetor

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3). \quad (4.13)$$

Se q é dado na forma trigonométrica, isto é

$$q = \cos \frac{\psi}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\psi}{2}, \quad \left(\mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} \right),$$

sendo q um quaterniño unitário que define uma rotação, então o ângulo da rotação é ψ e o eixo da rotação é representado por \mathbf{u} .

A partir de agora, vamos representar o quaterniño unitário $q = \cos \frac{\psi}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\psi}{2}$ associado à rotação R_ψ^u pela notação $q_{u,\psi}$, isto é,

$$q_{u,\psi} = \cos \frac{\psi}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\psi}{2} \quad (4.14)$$

e o quaterniño unitário $q = \cos \frac{\psi}{2} - \mathbf{u} \sin \frac{\psi}{2}$ associado à rotação $R_{-\psi}^u$ pela notação $q_{u,\psi}^*$, isto é,

$$q_{u,\psi}^* = \cos \frac{\psi}{2} - \mathbf{u} \sin \frac{\psi}{2}. \quad (4.15)$$

4.3 Ângulos de Euler

Nesta secção referimos os ângulos de Leonard Euler, que é um dos mais ilustres matemáticos do século XVIII. Estes ângulos vão ser muito utilizados ao longo deste trabalho, nomeadamente nas aplicações apresentadas.

Definição 4.3.1 *Dado um referencial, o ângulo de rotação em torno de um dos seus eixos coordenados é chamado Ângulo de Euler.*

Em princípio os ângulos de Euler são considerados quando rodamos o *referencial* e não um *ponto* [Pin06, p. 46].

Representação das matrizes de uma rotação segundo ângulos de Euler

As respetivas matrizes já foram apresentadas neste trabalho com as notações

$$R_{z,\psi}, \quad R_{x,\theta} \quad \text{e} \quad R_{y,\alpha}.$$

Representação dos quaterniões que definem operadores quaterniônicos de uma rotação segundo ângulos de Euler

Como $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ representa a base usual de \mathbb{R}^3 , podemos escrever

$$q_{x,\theta} = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{i} \sin \frac{\theta}{2} \quad (4.16)$$

$$q_{y,\alpha} = \cos \frac{\alpha}{2} + \mathbf{j} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (4.17)$$

$$q_{z,\psi} = \cos \frac{\psi}{2} + \mathbf{k} \sin \frac{\psi}{2} \quad (4.18)$$

Realce-se que os ângulos anteriores ψ , α e β são ângulos de Euler visto que os quaterniões unitários (4.16), (4.17) e (4.18) estão associados a rotações em torno dos eixos coordenados.

Teorema 4.3.1 (Teorema de Euler) *Quaisquer dois sistemas de eixos coordenados ortonormados independentes podem ser relacionados por uma composição de rotações (não mais de três) em torno dos eixos coordenados, onde duas rotações sucessivas não podem ser em torno do mesmo eixo.*

Dados dois sistemas de eixos ortonormados \mathbf{OXYZ} e \mathbf{oxyz} , relacionar os dois sistemas consiste em enviar um no outro por uma rotação afora a origem das coordenadas, isto é, enviar \mathbf{OX} , \mathbf{OY} e \mathbf{OZ} em eixos paralelos e com o mesmo sentido de \mathbf{ox} , \mathbf{oy} e \mathbf{oz} , respetivamente.

Podemos, então, obter uma composição de rotações de ângulos de Euler em torno de sucessivos eixos coordenados que enviará o primeiro referencial no segundo. A esta composição de rotações podemos chamar *sequência eixo-ângulo de Euler* e a sua ordem é importante, uma vez que as matrizes correspondentes de rotação não comutam.

Demonstração: Dado que, na composta das três rotações, dois eixos sucessivos não podem ser iguais, então vão existir 12 sequências eixo-ângulo de Euler, a saber

$$zyx \quad zxy \quad zyz \quad zxz$$

$$yzx \quad yxz \quad yzy \quad yxy$$

$$xzy \quad xyz \quad xzx \quad xyx.$$

A sequência xyz representa a rotação em torno do eixo dos $\mathbf{x}'s$, seguida da rotação em torno do novo eixo dos $\mathbf{y}'s$, seguida da rotação em torno do novo eixo dos $\mathbf{z}'s$ e, esta representação é análoga para as outras sequências.

Sejam dois referenciais ortonormados \mathbf{XYZ} e \mathbf{xyz} que, sem perda de generalidade, suponhamos que têm a mesma origem. Vamos ver que a sequência eixo-ângulo de Euler zyx envia o referencial \mathbf{XYZ} no referencial \mathbf{xyz} . Podemos, então, considerar:

– a *primeira* rotação em torno do eixo dos $\mathbf{Z}'s$ de modo que o eixo dos $\mathbf{X}'s$ coincida com a projeção do eixo dos $\mathbf{x}'s$ sobre o plano \mathbf{XY} ;

– a *segunda* rotação em torno do novo eixo dos $\mathbf{Y}'s$ (\mathbf{Y}_1) de forma que o novo eixo dos $\mathbf{X}'s$ (\mathbf{X}_1) coincida com o eixo dos $\mathbf{x}'s$. Note-se que, com esta rotação, os planos $\mathbf{Y}_2\mathbf{Z}_2$ e \mathbf{yz} coincidem;

– a *terceira* e última rotação em torno do novo eixo dos $\mathbf{X}'s$ (\mathbf{X}_2) de forma que os referenciais coincidam.

Repare-se que, como as seguintes sequências eixo-ângulo de Euler

$$zxy \quad yzx \quad yxz \quad xzy \quad xyz$$

são do mesmo tipo da anterior, a demonstração nestes casos é análoga.

Para finalizar, vamos demonstrar que é possível relacionar os dois referenciais ortonormados (\mathbf{XYZ} e \mathbf{xyz}) com a sequência eixo-ângulo de Euler zyz e da mesma maneira se demonstra que é possível para as sequências

$$zxz \quad yzy \quad yxy \quad xzx \quad xyx$$

porque também são do mesmo tipo.

Vamos, então, considerar:

– a *primeira* rotação em torno do eixo dos $\mathbf{Z}'s$ de modo que o eixo dos $\mathbf{Y}'s$ coincida com a interseção dos planos \mathbf{XY} e \mathbf{xy} . Note-se que, o novo eixo dos $\mathbf{Y}'s$ (\mathbf{Y}_1) é perpendicular aos eixos dos $\mathbf{Z}'s$ e dos $\mathbf{z}'s$, ou seja, os eixos dos $\mathbf{Z}'s$ e dos $\mathbf{z}'s$ estão no mesmo plano;

– a *segunda* rotação em torno do novo eixo dos $\mathbf{Y}'s$ (\mathbf{Y}_1) de modo que o novo eixo dos $\mathbf{Z}'s$ (\mathbf{Z}_2) coincida com o eixo dos $\mathbf{z}'s$. Note-se que, após esta rotação os planos $\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_2$ e \mathbf{xy} coincidem;

– a *terceira* e última rotação em torno do novo eixo dos $\mathbf{Z}'s$ (\mathbf{Z}_2) de forma que os referenciais coincidam. ■

Podemos, ainda, referir a

Proposição 4.3.1 *Qualquer rotação pode ser escrita como uma sequência eixo-ângulo de Euler.*

Vamos, agora, apresentar um resultado muito importante que será utilizado neste trabalho. Para tal, denote-se por *sequência fechada de rotações* uma composição de rotações que representa a rotação identidade.

Considere-se uma sequência fechada de rotações de n ângulos de Euler, R_i , para $n \geq 4$. Então,

$$\prod_{i=1}^n R_i = R_1 R_2 R_3 \cdots R_n = I.$$

Daqui é possível extrair vários pares de subsequências. Cada uma dessas subsequências tem que ter no mínimo duas rotações. Chamemos à matriz da primeira subsequência $M = R_1 R_2 \cdots R_k$ e, à segunda $N = R_{k+1} R_{k+2} \cdots R_n$.

Como $MN=I$ temos que $M = N^{-1} = N^t$, o que implica que M e N^t representam as matrizes de duas sequências de rotações de ângulos de Euler equivalentes. Donde se conclui que

Proposição 4.3.2 *Dada uma sequência fechada de rotações de n ângulos de Euler ($n \geq 4$), é possível encontrar, nessa sequência, pares de sequências de ângulos de Euler que são equivalentes.*

4.4 Das matrizes para o eixo-ângulo e vice-versa

Para cada rotação existe um único eixo e ângulo de rotação, isto é, cada rotação é definida pelo seu eixo e ângulo, que são únicos. Vamos ver, em primeiro lugar, como obter o **eixo de rotação** a partir da matriz de rotação. Para tal recorreremos à proposição que enunciamos de seguida.

Proposição 4.4.1 *Uma rotação em \mathbb{R}^3 tem um único valor próprio real, nomeadamente 1, associado à matriz dessa rotação.*

Seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

uma matriz de rotação. Sabemos que existe um vetor v de \mathbb{R}^3 não nulo (qualquer um paralelo ao eixo de rotação), tal que

$$Av = v.$$

Donde resulta que

$$\begin{aligned} Av = v &\iff Av - v = 0 \iff (A - I)v = 0 \iff \\ &\iff \begin{cases} (a_{11} - 1)v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 = 0 \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - 1)v_2 + a_{23}v_3 = 0 \\ a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + (a_{33} - 1)v_3 = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Para encontrar uma solução não trivial (que existe por 1 ser um valor próprio) para este sistema homogêneo basta considerarmos $v_3 = 1$ e usar quaisquer duas equações para determinar v_1 e v_2 . Vamos substituir v_3 por 1 nas duas primeiras equações obtendo as seguintes

$$(a_{11} - 1)v_1 + a_{12}v_2 = -a_{13}$$

e

$$a_{21}v_1 + (a_{22} - 1)v_2 = -a_{23}.$$

De seguida, usamos a Regra de Cramer para resolver o sistema constituído por estas duas equações, obtendo assim os valores de v_1 e v_2 .

Calculemos, em primeiro lugar, o determinante da matriz seguinte, que corresponde à matriz associada ao sistema das duas equações anteriores,

$$\begin{pmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - 1 \end{pmatrix}$$

que vamos chamar de matriz B.

$$\det B = (a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{21}a_{12}.$$

De seguida, usando a Regra de Cramer obtemos

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} - 1 \end{vmatrix}}{\det B} = \frac{-a_{13}(a_{22} - 1) + a_{23}a_{12}}{(a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{21}a_{12}}$$

e

$$v_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} - 1 & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix}}{\det B} = \frac{-a_{23}(a_{11} - 1) + a_{21}a_{13}}{(a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{21}a_{12}}.$$

O vetor que representa a direção do eixo de rotação é o vetor

$$(v_1, v_2, 1)$$

ou o vetor

$$(v_1 \det B, v_2 \det B, \det B),$$

ou seja,

$$\mathbf{v} = (-a_{13}(a_{22} - 1) + a_{23}a_{12}, -a_{23}(a_{11} - 1) + a_{21}a_{13}, (a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{21}a_{12}). \quad (4.19)$$

De seguida, vamos deduzir uma fórmula que dá o valor do **ângulo** de rotação à custa da matriz respetiva.

Seja A a matriz que representa a rotação em torno do eixo \mathbf{v} segundo o ângulo ψ . Vamos escrever esta rotação como uma composição de rotações do referencial \mathbf{XYZ} em torno dos seus eixos coordenados.

Na *primeira* rotação vamos rodar o referencial em torno do eixo dos \mathbf{Z}' s de forma que o eixo dos \mathbf{X}' s coincida com a projeção de \mathbf{v} sobre o plano \mathbf{XY} . Vamos chamar ao ângulo de rotação α . Esta rotação (R_α^z) corresponde à matriz $R_{z,\alpha}$.

Na *segunda* rotação vamos rodar o novo referencial em torno do novo eixo dos \mathbf{Y}' s de modo a que o novo eixo dos \mathbf{X}' s coincida com o eixo \mathbf{v} ; seja β o ângulo de rotação. A matriz desta rotação é $R_{y,\beta}$.

Vamos representar o produto destas duas matrizes pela matriz $C = R_{y,\beta}R_{z,\alpha}$. Sabemos que C é uma matriz de rotação.

Na *terceira* rotação vamos rodar o referencial obtido em torno do eixo \mathbf{v} , isto é, em torno do novo eixo dos \mathbf{X}' s, com ângulo de rotação ψ . A correspondente matriz de rotação é

$$R_{v,\psi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Na *quarta* e última rotação vamos rodar o referencial com uma rotação inversa da rotação representada pela matriz C , isto é, $C^{-1} = C^t$.

A composição destas rotações representa a rotação do referencial **XYZ** em torno de \mathbf{v} segundo o ângulo ψ , que representámos inicialmente pela matriz A , isto é,

$$A = C^t R_{v,\psi} C. \quad (4.20)$$

Para obter o ângulo ψ vamos utilizar o seguinte resultado cuja prova é simples.

Proposição 4.4.2 *Sejam A, B matrizes quadradas da mesma ordem, então*

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

Usando o resultado anterior, temos que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A) &= \text{Tr}(C^t R_{v,\psi} C) \\ &= \text{Tr}((C^t R_{v,\psi}) C) \\ &= \text{Tr}(C (C^t R_{v,\psi})) \\ &= \text{Tr}(I R_{v,\psi}) \\ &= \text{Tr}(R_{v,\psi}). \end{aligned}$$

Note-se que C é ortogonal, e portanto $CC^t = I$. A partir de

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(R_{v,\psi}) = 1 + 2 \cos \psi$$

conclui-se que, o ângulo da rotação é

$$\psi = \arccos\left(\frac{\text{Tr}(A) - 1}{2}\right). \quad (4.21)$$

Reciprocamente, também conseguimos, a partir do ângulo de rotação ψ e do eixo de rotação definido pelo vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, obter a **matriz de rotação**. Nesse sentido vamos escrever a matriz A (4.20), que representa a matriz de rotação do referencial **XYZ** em torno de \mathbf{v} segundo o ângulo ψ , em função das componentes v_1, v_2 e v_3 de \mathbf{v} e do ângulo ψ .

Começemos por escrever \mathbf{v} em termos de α e β . Para isso, vamos partir de

$$C = R_{y,\beta} R_{z,\alpha} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha & \cos \beta \sin \alpha & -\sin \beta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \sin \beta \cos \alpha & \sin \beta \sin \alpha & \cos \beta \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

que representa a matriz de rotação do referencial \mathbf{XYZ} no referencial \mathbf{xyz} , isto é, a rotação que leva o eixo \mathbf{X} no eixo que contém o vetor \mathbf{v} . Conseqüentemente, a matriz que representa a rotação do referencial \mathbf{xyz} no referencial \mathbf{XYZ} é [Val82, p. 268–285]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}^{-1} &= \mathbf{C}^t = \\
 &\begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha & -\sin \alpha & \sin \beta \cos \alpha \\ \cos \beta \sin \alpha & \cos \alpha & \sin \beta \sin \alpha \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

A partir desta representação, podemos escrever

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = (\cos \beta \cos \alpha, \cos \beta \sin \alpha, -\sin \beta).$$

Se usarmos a fórmula fundamental da trigonometria e efetuarmos os produtos entre as matrizes $\mathbf{C}^t R_{\mathbf{v}, \psi} \mathbf{C}$ vamos obter a matriz de rotação \mathbf{A} , a saber

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \beta \cos^2 \alpha + (\cos^2 \beta \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) \cos \psi & \vdots & \\ \cos^2 \beta \cos \alpha \sin \alpha (1 - \cos \psi) + \sin \beta \sin \psi & \vdots & \\ -\sin \beta \cos \beta \cos \alpha (1 - \cos \psi) + \cos \beta \sin \alpha \sin \psi & \vdots & \\ \vdots & \cos^2 \beta \cos \alpha \sin \alpha (1 - \cos \psi) - \sin \beta \sin \psi & \vdots \\ \vdots & \cos^2 \beta \sin^2 \alpha + (\cos^2 \beta \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta) \cos \psi & \vdots \\ \vdots & -\sin \beta \cos \beta \sin \alpha (1 - \cos \psi) - \cos \beta \cos \alpha \sin \psi & \vdots \\ \vdots & -\sin \beta \cos \beta \cos \alpha (1 - \cos \psi) - \cos \beta \sin \alpha \sin \psi & \vdots \\ \vdots & -\sin \beta \cos \beta \sin \alpha (1 - \cos \psi) + \cos \beta \cos \alpha \sin \psi & \vdots \\ \vdots & \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \cos \psi & \vdots \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Note-se que, como cada elemento da matriz é longo, escrevemos a primeira coluna, seguida da segunda e da terceira.

Atendendo às igualdades $v_1 = \cos \beta \cos \alpha$, $v_2 = \cos \beta \sin \alpha$ e $v_3 = -\sin \beta$, a matriz A pode ser escrita na forma

$$A = \begin{pmatrix} v_1^2 + (v_2^2 + v_3^2) c & v_1 v_2 (1 - c) + v_3 s & v_1 v_3 (1 - c) - v_2 s \\ v_1 v_2 (1 - c) - v_3 s & v_2^2 + (v_1^2 + v_3^2) c & v_2 v_3 (1 - c) + v_1 s \\ v_1 v_3 (1 - c) + v_2 s & v_2 v_3 (1 - c) - v_1 s & v_3^2 + (v_1^2 + v_2^2) c \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

onde $s = \sin \psi$ e $c = \cos \psi$.

A transposta da matriz A representa a rotação do ponto em torno de \mathbf{v} segundo o ângulo ψ , podendo apresentar-se escrita na forma

$$\begin{pmatrix} v_1^2 + (v_2^2 + v_3^2) c & v_1 v_2 (1 - c) - v_3 s & v_1 v_3 (1 - c) + v_2 s \\ v_1 v_2 (1 - c) + v_3 s & v_2^2 + (v_1^2 + v_3^2) c & v_2 v_3 (1 - c) - v_1 s \\ v_1 v_3 (1 - c) - v_2 s & v_2 v_3 (1 - c) + v_1 s & v_3^2 + (v_1^2 + v_2^2) c \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

e, se usarmos a fórmula $2 \sin^2 \frac{\psi}{2} = 1 - \cos \psi$, podemos ainda escrever A na forma [Alt86, p. 73–75]

$$\begin{pmatrix} 1 - 2(v_2^2 + v_3^2) \sin^2 \frac{\psi}{2} & -v_3 \sin \psi + 2v_1 v_2 \sin^2 \frac{\psi}{2} & v_2 \sin \psi + 2v_1 v_3 \sin^2 \frac{\psi}{2} \\ v_3 \sin \psi + 2v_1 v_2 \sin^2 \frac{\psi}{2} & 1 - 2(v_1^2 + v_3^2) \sin^2 \frac{\psi}{2} & -v_1 \sin \psi + 2v_2 v_3 \sin^2 \frac{\psi}{2} \\ -v_2 \sin \psi + 2v_1 v_3 \sin^2 \frac{\psi}{2} & v_1 \sin \psi + 2v_2 v_3 \sin^2 \frac{\psi}{2} & 1 - 2(v_1^2 + v_2^2) \sin^2 \frac{\psi}{2} \end{pmatrix}.$$

4.4.1 Ângulos de Euler

Vamos escrever os ângulos de Euler α , β e γ a partir do ângulo ψ e do eixo de rotação definido pelo vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ de uma rotação do referencial [Alt86, p. 75–76].

Vamos exemplificar com a sequência eixo-ângulo de Euler xyz (poderíamos usar qualquer uma das doze sequências e um quaterniã associado a uma rotação de pontos).

Seja $q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$ o quaterniã unitário associado ao operador $L_q(\mathbf{v}) = q^* \mathbf{v} q$ e A , na forma (4.23), a matriz de rotação correspondente. Então podemos escrever

$$A = R_{z,\gamma} R_{y,\beta} R_{x,\alpha}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} v_1^2 + (v_2^2 + v_3^2)c & v_1v_2(1-c) + v_3s & v_1v_3(1-c) - v_2s \\ v_1v_2(1-c) - v_3s & v_2^2 + (v_1^2 + v_3^2)c & v_2v_3(1-c) + v_1s \\ v_1v_3(1-c) + v_2s & v_2v_3(1-c) - v_1s & v_3^2 + (v_1^2 + v_2^2)c \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \beta & \sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha & \sin \gamma \sin \alpha - \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha \\ -\sin \gamma \cos \beta & \cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha & \cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha \\ \sin \beta & -\cos \beta \sin \alpha & \cos \beta \cos \alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

onde $c = \cos \psi$ e $s = \sin \psi$.

Desta igualdade resultam as expressões

$$\begin{aligned}
\sin \beta &= v_1v_3(1 - \cos \psi) + v_2 \sin \psi, \\
\tan \alpha &= \frac{v_1 \sin \psi - v_2v_3(1 - \cos \psi)}{v_3^2 + (v_1^2 + v_2^2) \cos \psi}, \\
\sin \alpha &= \frac{v_1 \sin \psi - v_2v_3(1 - \cos \psi)}{\cos \beta}, \\
\cos \alpha &= \frac{v_3^2 + (v_1^2 + v_2^2) \cos \psi}{\cos \beta}, \\
\tan \gamma &= \frac{v_3 \sin \psi - v_1v_2(1 - \cos \psi)}{v_1^2 + (v_2^2 + v_3^2) \cos \psi}, \\
\sin \gamma &= \frac{v_3 \sin \psi - v_1v_2(1 - \cos \psi)}{\cos \beta}, \\
\cos \gamma &= \frac{v_1^2 + (v_2^2 + v_3^2) \cos \psi}{\cos \beta}.
\end{aligned}$$

Obtiveram-se, assim, expressões dos ângulos de Euler α , β e γ da sequência xyz a partir do ângulo e do eixo da rotação cujo operador matricial é A .

4.5 Dos quaterniões para as matrizes e vice-versa

Nesta secção, vamos ver de que forma podemos chegar à matriz de rotação a partir do quaternião associado a um operador quaterniônico de rotação, e vice-versa.

Vamos deduzir em primeiro lugar a **matriz de rotação** a partir do quaternião q associado ao operador quaterniônico $L_q(\mathbf{v}) = q^*\mathbf{v}q$, de rotação do referencial.

Vamos aplicar o operador L_q ao vetor \mathbf{v} definido no referencial inicial e vamos expressá-lo como o vetor \mathbf{w} com coordenadas no referencial rodado. Vamos usar a igualdade (4.5). Temos, então, que

$$(2q_0^2 - 1)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2q_0^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2q_0^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2q_0^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

$$2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 2q_1^2 & 2q_1q_2 & 2q_1q_3 \\ 2q_1q_2 & 2q_2^2 & 2q_2q_3 \\ 2q_1q_3 & 2q_2q_3 & 2q_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

e

$$-2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 & 2q_0q_3 & -2q_0q_2 \\ -2q_0q_3 & 0 & 2q_0q_1 \\ 2q_0q_2 & -2q_0q_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Somando as três igualdades obtidas, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q_0^2 - 1 + 2q_1^2 & 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_1q_3 - 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_0^2 - 1 + 2q_2^2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 + 2q_0q_2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 & 2q_0^2 - 1 + 2q_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Obtivemos, assim, a partir do quaternião unitário $q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$ a matriz de rotação

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2q_0^2 - 1 + 2q_1^2 & 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_1q_3 - 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_0^2 - 1 + 2q_2^2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 + 2q_0q_2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 & 2q_0^2 - 1 + 2q_3^2 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Temos então que

$$\mathbf{w} = q^*\mathbf{v}q = \mathbf{Q}\mathbf{v}.$$

Para o operador quaterniônico de rotação de um ponto L_q facilmente se verifica que

$$\mathbf{w} = q\mathbf{v}q^* = \mathbf{Q}^t\mathbf{v}.$$

Estes resultados confirmam que o operador $L_q(\mathbf{v}) = q^*\mathbf{v}q$ representa uma rotação do referencial e o operador $L_q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}q^*$ representa uma rotação de pontos. Realce-se que a rotação do referencial em torno de um eixo segundo um certo ângulo é equivalente a uma rotação de pontos em torno do mesmo eixo mas segundo o simétrico desse ângulo.

Note-se, ainda, que

$$\text{Tr}(Q) = 4q_0^2 - 1$$

e, se atendermos ao resultado (4.21) também temos que

$$\text{Tr}(Q) = 1 + 2 \cos \psi.$$

Então se aplicarmos a fórmula $\cos 2\psi = 2 \cos^2 \psi - 1$ obtemos $q_0 = \cos \frac{\psi}{2}$, como já era de se esperar [Sho85, p. 248].

Reciprocamente, a partir de uma matriz de rotação vamos obter o **quaterniônio associado ao operador quaterniônico de rotação**.

A partir da matriz de rotação $A = [a_{ij}] = Q$, isto é,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q_0^2 - 1 + 2q_1^2 & 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_1q_3 - 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_0^2 - 1 + 2q_2^2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 + 2q_0q_2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 & 2q_0^2 - 1 + 2q_3^2 \end{pmatrix}$$

tem-se que

$$a_{23} - a_{32} = 4q_0q_1,$$

$$a_{31} - a_{13} = 4q_0q_2,$$

$$a_{12} - a_{21} = 4q_0q_3$$

e

$$\text{Tr}(A) = 4q_0^2 - 1.$$

Da última equação vem que

$$q_0 = \frac{\sqrt{a_{11} + a_{22} + a_{33} + 1}}{2}.$$

A partir da expressão para q_0 podemos tirar as outras componentes do quaterniônio associado ao operador quaterniônico de rotação $L_q(\mathbf{v}) = q^*\mathbf{v}q$, a saber

$$q_1 = \frac{a_{23} - a_{32}}{2\sqrt{a_{11} + a_{22} + a_{33} + 1}},$$

$$q_2 = \frac{a_{31} - a_{13}}{2\sqrt{a_{11} + a_{22} + a_{33} + 1}}$$

e

$$q_3 = \frac{a_{12} - a_{21}}{2\sqrt{a_{11} + a_{22} + a_{33} + 1}}.$$

Note-se que, do mesmo modo, obtemos o quaterni3o associado ao operador quaterni3nico de rota33o $L_q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}q^*$ a partir da matriz de rota33o Q^t .

4.5.1 3ngulos de Euler

Vamos escrever os 3ngulos de Euler em fun33o do quaterni3o unit3rio associado a uma rota33o.

Comecemos por determinar, a partir da matriz de rota33o do referencial da sequ3ncia eixo-3ngulo de Euler xyz , os 3ngulos de Euler em fun33o do quaterni3o associado ao operador quaterni3nico de rota33o. Note-se que poderi3mos utilizar qualquer uma das doze sequ3ncias e que o procedimento 3 an3logo para a rota33o do ponto.

Seja $q = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$ o quaterni3o unit3rio associado ao operador $L_q(\mathbf{v}) = q^*\mathbf{v}q$ e Q , na forma (4.25), a matriz de rota33o correspondente. Ent3o podemos escrever

$$Q = R_{z,\gamma} R_{y,\beta} R_{x,\alpha}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2q_0^2 - 1 + 2q_1^2 & 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_1q_3 - 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_0^2 - 1 + 2q_2^2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 + 2q_0q_2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 & 2q_0^2 - 1 + 2q_3^2 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \cos \gamma \cos \beta & \sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha & \sin \gamma \sin \alpha - \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha \\ -\sin \gamma \cos \beta & \cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha & \cos \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha \\ \sin \beta & -\cos \beta \sin \alpha & \cos \beta \cos \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daqui resultam as express3es

$$\begin{aligned} \sin \beta &= 2q_1q_3 + 2q_0q_2, \\ \tan \alpha &= -\frac{2q_2q_3 - 2q_0q_1}{2q_0^2 - 1 + 2q_3^2}, \quad \sin \alpha = -\frac{2q_2q_3 - 2q_0q_1}{\cos \beta}, \quad \cos \alpha = \frac{2q_0^2 - 1 + 2q_3^2}{\cos \beta}, \end{aligned}$$

$$\tan \gamma = -\frac{2q_1q_2 + 2q_0q_3}{2q_0^2 - 1 + 2q_1^2}, \quad \sin \gamma = -\frac{2q_1q_2 + 2q_0q_3}{\cos \beta} \quad \text{e} \quad \cos \gamma = \frac{2q_0^2 - 1 + 2q_1^2}{\cos \beta}.$$

Obtivemos, assim, expressões para os ângulos de Euler α , β e γ da sequência xyz a partir do quaternião unitário q associado à rotação representada pela matriz Q .

Capítulo 5

Aplicações

Neste capítulo vamos ver alguns exemplos de aplicações dos quaterniões em diversas áreas (trigonometria esférica, aeronáutica, engenharia aeroespacial e astronomia). Ao longo deste desenvolvimento vamos destacando algumas das vantagens do uso dos quaterniões para lidar com rotações. No final apresentamos algumas das vantagens e desvantagens relativas da aplicação dos quaterniões, das matrizes e dos ângulos de Euler nas rotações, não deixando de referir a importância dos quaterniões na evolução da animação em 3D, assim como na robótica.

5.1 Uso de quaterniões em trigonometria esférica

Desde o início que Hamilton defendia a utilidade dos quaterniões na trigonometria esférica. Refira-se que as consequências geométricas da trigonometria esférica que aqui apresentamos já tinham sido anteriormente descobertas por duas vezes. A primeira por Gauss (1819), num trabalho não publicado sobre rotações na esfera, a que Hamilton não teve acesso e a segunda numa publicação de Rodrigues (1840) que não lhe despertou a atenção [Sti04, p. 391].

Nesta secção vamos analisar de que modo os quaterniões podem ser utilizados na dedução de alguns resultados de trigonometria da esfera.

5.1.1 Triângulos esféricos

Vamos partir de um triângulo esférico ABD , ou seja, uma figura formada por três arcos de círculos máximos e, usando composições de rotações em \mathbb{R}^3 com ele relacionadas, obter diversas e curiosas relações entre os seus lados e os seus ângulos.

Considere-se três pontos distintos A , B e D que estão sobre a superfície de uma esfera unitária, isto é, de uma esfera de raio 1. Usamos esta esfera, em particular, para que a amplitude do arco do círculo máximo entre dois pontos seja igual à amplitude em radianos do ângulo ao centro correspondente a esse arco.

Podemos, sem perda de generalidade, considerar o referencial \mathbf{XYZ} (sentido positivo) com origem no centro da esfera, O , o eixo dos \mathbf{Z} 's contendo o ponto A e o plano \mathbf{YZ} contendo o ponto D . Para que ABD seja um triângulo esférico não degenerado na superfície da esfera, então basta que o ponto B não pertença ao plano \mathbf{YZ} .

Sejam cada um dos pares destes pontos ligados por arcos de círculos máximos. Vamos designar por a a medida em radianos do arco de círculo máximo que liga o ponto B a D ; por b a medida em radianos do arco de círculo máximo entre os pontos A e D ; por d a medida em radianos do arco de círculo máximo entre os pontos A e B . Note-se que os arcos a , b e d são os lados do triângulo esférico considerado e que cada um destes arcos está na interseção da esfera com o plano que contém os vértices daquele arco e o centro da esfera. Como a esfera é unitária, sabemos também que as amplitudes dos ângulos ao centro $\angle AOB$, $\angle BOD$ e $\angle DOA$ correspondem respetivamente aos comprimentos dos arcos d , a e b . Designemos por α , β e δ os ângulos internos do triângulo esférico em cada vértice A , B e D , respetivamente (fig. 5.1).

De seguida, vamos considerar uma composição de *seis* rotações com uma ordem própria que representa a *identidade*. Esta composição será fácil de seguir, uma vez que contorna por ordem o triângulo esférico ABD . A concatenação destas rotações é uma sequência fechada de rotações, isto é, o referencial \mathbf{xyz} que inicialmente coincide com o referencial fixo na esfera, \mathbf{XYZ} , após a composição de rotações irá coincidir de novo com este, mantendo-se a orientação. As rotações serão em torno de eixos adequados, segundo os ângulos internos do triângulo α , β e δ , e dos seus três lados a , b e d . Vamos considerar estes parâmetros positivos. Também vamos escolher a direção ADB à volta do triângulo, de modo a ter a maioria das rotações positivas.

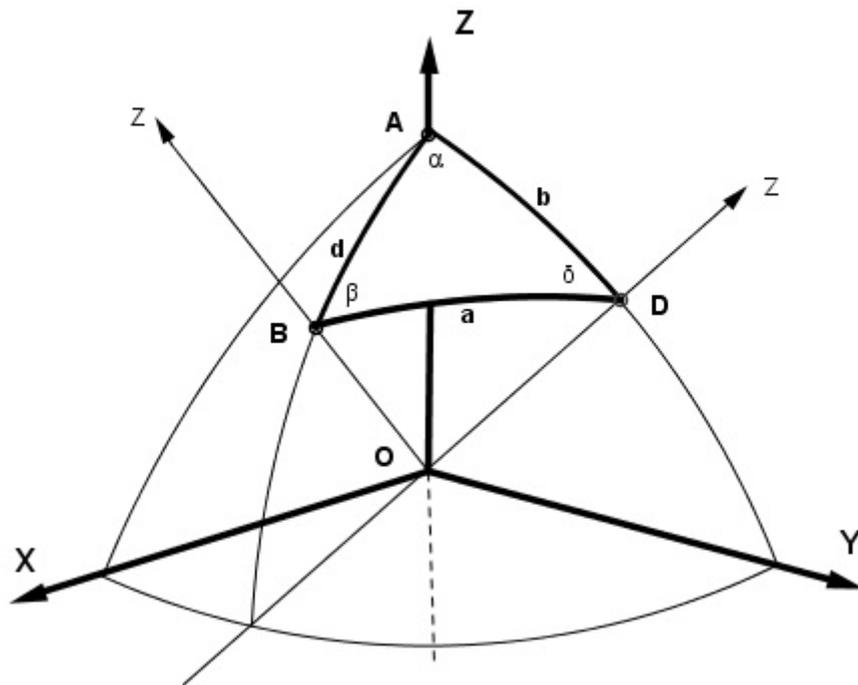


Figura 5.1: Triângulo Esférico

[Imagem realizada no programa Geogebra]

As rotações que fazem parte desta composição serão descritas de seguida.

– A *primeira* rotação será em torno do eixo dos $\mathbf{x}'s$ coincidente com o eixo dos $\mathbf{X}'s$ segundo o ângulo $-b$, que representamos por R_{-b}^x . Neste caso, o ângulo de rotação é negativo porque a direção do movimento é contrária à orientação do referencial. Note-se que, após a rotação o eixo dos $\mathbf{z}'s$ do referencial de rotação que passava pelo vértice A agora contém o ponto D .

– A *segunda* rotação será em torno do novo eixo dos $\mathbf{z}'s$ segundo o ângulo δ , indicada por R_{δ}^z . Com esta rotação o novo plano \mathbf{yz} vai conter o lado a do triângulo.

– A *terceira* rotação será em torno do novo eixo dos $\mathbf{x}'s$ segundo o ângulo a , caracterizada por R_a^x . Após a rotação o novo eixo dos $\mathbf{z}'s$ passará a conter o vértice B do triângulo esférico.

– A *quarta* rotação será em torno do novo eixo dos $\mathbf{z}'s$ segundo o ângulo β , representada por R_{β}^z . Esta rotação fará com que o novo plano \mathbf{yz} contenha agora o lado d do triângulo ABD .

– A *quinta* rotação será em torno do novo eixo dos $\mathbf{x}'s$ segundo o ângulo $-d$, cuja representação é R_{-d}^x . Note-se que, o ângulo desta rotação é negativo, a orientação é contrária à orientação positiva do referencial. A rotação fará coincidir o novo eixo dos $\mathbf{z}'s$ outra vez com o eixo dos $\mathbf{Z}'s$ do sistema de coordenadas de referência \mathbf{XYZ} e irá conter de novo o vértice A .

– A *sexta* rotação, a última das rotações desta composição, fará coincidir o referencial rodado \mathbf{xyz} com o referencial original \mathbf{XYZ} . Esta rotação será em torno do novo eixo dos $\mathbf{z}'s$ segundo o ângulo γ , onde este ângulo irá corresponder a $\pi + \alpha$. Se a rotação fosse apenas segundo o ângulo α esta não colocaria o eixo dos $\mathbf{x}'s$ com a mesma orientação do eixo dos $\mathbf{X}'s$. A representação desta rotação é dada por R_γ^z . Note-se que o plano final \mathbf{yz} é mais uma vez coincidente com o plano \mathbf{YZ} que contém os vértices A e D e o lado b do triângulo esférico considerado.

Concluimos que esta composição de rotações é uma sequência fechada de rotações, ou seja, corresponde à identidade.

5.1.1.1 Análise quaterniônica

Usando quaterniões, a sequência dada acima permite extrair relações entre os vários ângulos que caracterizam um triângulo esférico. Para cada uma das rotações desta sequência fechada temos um quaterniões correspondente. O produto dos quaterniões associados a cada uma das rotações, com a ordem correta representará um quaterniões cuja parte real é 1 e não tem parte vetorial. Como

$$R_\gamma^z \circ R_{-d}^x \circ R_\beta^z \circ R_a^x \circ R_\delta^z \circ R_{-b}^x = I,$$

tem-se

$$q_{x,b}^* q_{z,\delta} q_{x,a} q_{z,\beta} q_{x,d}^* q_{z,\gamma} = 1.$$

Após as multiplicações apropriadas, também, obtém-se

$$q_{z,\beta} q_{x,d}^* q_{z,\gamma} = q_{x,a}^* q_{z,\delta}^* q_{x,b}. \quad (5.1)$$

Sabemos que

$$q_{z,\beta} = \cos \frac{\beta}{2} + \mathbf{k} \sin \frac{\beta}{2},$$

$$q_{x,d}^* = \cos \frac{d}{2} - \mathbf{i} \sin \frac{d}{2},$$

$$\begin{aligned}
q_{z,\gamma} &= \cos \frac{\gamma}{2} + \mathbf{k} \sin \frac{\gamma}{2} = -\sin \frac{\alpha}{2} + \mathbf{k} \cos \frac{\alpha}{2}, \\
q_{x,a}^* &= \cos \frac{a}{2} - \mathbf{i} \sin \frac{a}{2}, \\
q_{z,\delta}^* &= \cos \frac{\delta}{2} - \mathbf{k} \sin \frac{\delta}{2}
\end{aligned}$$

e

$$q_{x,b} = \cos \frac{b}{2} + \mathbf{i} \sin \frac{b}{2}.$$

Então usando a definição de produto quaterniônico, vemos que

$$\begin{aligned}
q_{z,\beta} q_{x,d}^* q_{z,\gamma} &= \cos \frac{d}{2} \left(-\cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \\
&+ \mathbf{i} \sin \frac{d}{2} \left(\cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \\
&+ \mathbf{j} \sin \frac{d}{2} \left(\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \\
&+ \mathbf{k} \cos \frac{d}{2} \left(\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right) = \\
&= -\cos \frac{d}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} + \mathbf{i} \sin \frac{d}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} + \mathbf{j} \sin \frac{d}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \mathbf{k} \cos \frac{d}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}
\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
q_{x,a}^* q_{z,\delta}^* q_{x,b} &= \cos \frac{\delta}{2} \left(\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \right) + \\
&+ \mathbf{i} \cos \frac{\delta}{2} \left(\cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} - \sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \right) + \\
&+ \mathbf{j} \sin \frac{\delta}{2} \left(-\sin \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} - \cos \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \right) + \\
&+ \mathbf{k} \sin \frac{\delta}{2} \left(-\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} + \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \right) = \\
&= \cos \frac{\delta}{2} \cos \frac{a - b}{2} - \mathbf{i} \cos \frac{\delta}{2} \sin \frac{a - b}{2} - \mathbf{j} \sin \frac{\delta}{2} \sin \frac{a + b}{2} - \mathbf{k} \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{a + b}{2}.
\end{aligned}$$

Atendendo à equação (5.1) podemos igualar os resultados obtidos, ou seja,

$$\begin{aligned}
&-\cos \frac{d}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} + \mathbf{i} \sin \frac{d}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} + \mathbf{j} \sin \frac{d}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \mathbf{k} \cos \frac{d}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \\
&= \cos \frac{\delta}{2} \cos \frac{a - b}{2} - \mathbf{i} \cos \frac{\delta}{2} \sin \frac{a - b}{2} - \mathbf{j} \sin \frac{\delta}{2} \sin \frac{a + b}{2} - \mathbf{k} \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{a + b}{2}.
\end{aligned}$$

Desta última equação saem as seguintes igualdades:

$$-\cos \frac{d}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos \frac{\delta}{2} \cos \frac{a - b}{2}, \quad (5.2)$$

$$\sin \frac{d}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = -\cos \frac{\delta}{2} \sin \frac{a - b}{2}, \quad (5.3)$$

$$\sin \frac{d}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = -\sin \frac{\delta}{2} \sin \frac{a + b}{2} \quad (5.4)$$

e

$$\cos \frac{d}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = -\sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{a + b}{2}, \quad (5.5)$$

que são muito úteis na obtenção de vários resultados da trigonometria esférica. Como é fácil de compreender, podemos a partir destas equações iniciais, estudar e demonstrar muitas igualdades de um triângulo esférico. No entanto, neste trabalho vamos expor apenas alguns desses resultados, nomeadamente os que se seguem.

Lei dos senos:

$$\frac{\sin d}{\sin \delta} = \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}$$

Demonstração: Se multiplicarmos as equações (5.2) e (5.4) e usarmos as igualdades trigonométricas

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

e

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

obtemos

$$\sin \frac{d}{2} \cos \frac{d}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right) = \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \left(\sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} + \sin \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2} \right),$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} & 2 \sin \frac{d}{2} \cos \frac{d}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{d}{2} \cos \frac{d}{2} \cdot 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} = \\ & = 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \cdot 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} + 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \cdot 2 \sin \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2} \end{aligned}$$

de onde se obtém a igualdade seguinte

$$\sin d \sin \alpha + \sin d \sin \beta = \sin \delta \sin a + \sin \delta \sin b. \quad (5.6)$$

De maneira análoga, se multiplicarmos as equações (5.3) e (5.5) e usarmos as mesmas propriedades usadas anteriormente, obtemos

$$\sin \frac{d}{2} \cos \frac{d}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right) = \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \left(\sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} - \sin \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2} \right)$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{d}{2} \cos \frac{d}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - 2 \sin \frac{d}{2} \cos \frac{d}{2} \cdot 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} &= \\ = 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \cdot 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} - 2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \cdot 2 \sin \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2} \end{aligned}$$

de onde resulta

$$\sin d \sin \alpha + \sin d \sin \beta = \sin \delta \sin a - \sin \delta \sin b. \quad (5.7)$$

Se somarmos as equações (5.6) e (5.7) obtemos:

$$\sin d \sin \alpha = \sin \delta \sin a$$

donde vem que

$$\frac{\sin d}{\sin \delta} = \frac{\sin a}{\sin \alpha}.$$

Se subtrairmos as equações (5.6) e (5.7) obtemos

$$\sin d \sin \beta = \sin \delta \sin b$$

e

$$\frac{\sin d}{\sin \delta} = \frac{\sin b}{\sin \beta}.$$

A partir das duas últimas igualdades, temos o queríamos demonstrar:

$$\frac{\sin d}{\sin \delta} = \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}.$$

■

Lei dos cosenos (1): Relativamente ao lado d do triângulo esférico podemos obter a lei

$$\cos d = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \delta.$$

Demonstração: Se elevarmos ao quadrado as equações (5.2) e (5.5) obtemos as igualdades seguintes, respetivamente,

$$\cos^2 \frac{d}{2} \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos^2 \frac{\delta}{2} \cos^2 \frac{a - b}{2},$$

$$\cos^2 \frac{d}{2} \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin^2 \frac{\delta}{2} \cos^2 \frac{a + b}{2}.$$

De seguida, se somarmos estas duas igualdades, temos que

$$\cos^2 \frac{d}{2} \left(\sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \cos^2 \frac{\delta}{2} \cos^2 \frac{a - b}{2} + \sin^2 \frac{\delta}{2} \cos^2 \frac{a + b}{2}.$$

Se agora usarmos as fórmulas

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2},$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

e, efetuarmos os cálculos, simplificando, vamos ter a igualdade que queremos demonstrar, a saber,

$$\cos d = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \delta. \quad \blacksquare$$

Numa sequência fechada de rotações podemos começar por qualquer rotação desde que não se altere a ordem das rotações. Por isso, também podemos demonstrar de modo análogo, as igualdades seguintes:

$$\cos a = \cos b \cos d + \sin b \sin d \cos \alpha$$

e

$$\cos b = \cos a \cos d + \sin a \sin d \cos \beta.$$

Para obtermos a primeira, basta começarmos a composição de rotações a partir da rotação R_a^x , obtendo

$$R_\delta^z \circ R_{-b}^x \circ R_\gamma^z \circ R_{-d}^x \circ R_\beta^z \circ R_a^x = I$$

que dá origem à igualdade

$$q_{z,\gamma} q_{x,b}^* q_{z,\delta} = q_{x,d} q_{z,\beta}^* q_{x,a}^*.$$

Para chegarmos à segunda igualdade, partimos da rotação R_{-d}^x , obtendo

$$R_{\beta}^z \circ R_a^x \circ R_{\delta}^z \circ R_{-b}^x \circ R_{\gamma}^z \circ R_{-d}^x = I$$

que corresponde à igualdade quaterniônica

$$q_{z,\delta} q_{x,a} q_{z,\beta} = q_{x,b} q_{z,\gamma}^* q_{x,d}.$$

Nas várias deduções das igualdades seguintes, poderemos agora demonstrar igualdades análogas usando as equações que já conseguimos deduzir a partir destas composições.

Lei dos cosenos (2): Relativamente ao ângulo δ do triângulo esférico podemos obter a lei

$$\cos \delta = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos d.$$

Demonstração: De modo análogo, como realizado anteriormente, se elevarmos ao quadrado as equações (5.2) e (5.3), respetivamente, obtemos as igualdades seguintes

$$\cos^2 \frac{d}{2} \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos^2 \frac{\delta}{2} \cos^2 \frac{a - b}{2},$$

$$\sin^2 \frac{d}{2} \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos^2 \frac{\delta}{2} \sin^2 \frac{a - b}{2}.$$

De seguida, se somarmos estas duas igualdades, vamos ter

$$\cos^2 \frac{\delta}{2} \left(\cos^2 \frac{a - b}{2} + \sin^2 \frac{a - b}{2} \right) = \cos^2 \frac{d}{2} \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + \sin^2 \frac{d}{2} \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Do mesmo modo, se usarmos as fórmulas da demonstração anterior e efetuarmos os cálculos, simplificando, obtemos a igualdade que queremos mostrar, ou seja,

$$\cos \delta = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos d.$$

■

Ainda podemos estabelecer identidades trigonométricas de um triângulo esférico que são muito úteis. As quatro igualdades seguintes são conhecidas como as

Analogias de Napier:

$$\frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} = \frac{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cot \frac{\delta}{2}} \quad (5.8)$$

Esta igualdade é obtida quando se divide a equação (5.2) pela equação (5.5).

$$\frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} = \frac{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cot \frac{\delta}{2}} \quad (5.9)$$

Se dividirmos a equação (5.3) pela equação (5.4) obtemos a igualdade anterior.

$$\frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\tan \frac{a+b}{2}}{\tan \frac{d}{2}} \quad (5.10)$$

De modo análogo, dividindo a equação (5.4) pela equação (5.5) obteve-se a identidade anterior.

$$\frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\tan \frac{a+b}{2}}{\tan \frac{d}{2}} \quad (5.11)$$

E esta igualdade foi obtida dividindo a equação (5.3) pela equação (5.2).

Também podemos obter a seguinte identidade, no triângulo esférico, que é conhecida como

Lei das Tangentes:

$$\frac{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\tan \frac{a-b}{2}}{\tan \frac{a+b}{2}} \quad (5.12)$$

Para se obter esta igualdade, basta que se divida a equação (5.9) pela equação (5.8). Note-se que a equação (5.12) é independente da amplitude de um dos três ângulos do triângulo e do seu lado oposto correspondente.

5.1.1.2 Triângulos esféricos retângulos

Neste caso particular, em que $\delta = \frac{\pi}{2}$, obtém-se facilmente algumas identidades interessantes, nomeadamente, substituindo δ por $\frac{\pi}{2}$, nas leis do seno, coseno (1) e (2), respetivamente, vamos ter

$$\begin{aligned}\sin d &= \frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}, \\ \cos d &= \cos a \cos b\end{aligned}$$

e

$$\tan \alpha \cos d \tan \beta = 1.$$

Também, como $\cot \frac{\delta}{2} = \cot \frac{\pi}{4} = 1$, temos que a partir das equações (5.8) e (5.9), obtém-se, após a substituição, respetivamente,

$$\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \quad (5.13)$$

e

$$\tan \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}}. \quad (5.14)$$

Ainda, a partir destas equações anteriores podemos mostrar as seguintes igualdades, para α e β independentes um do outro,

$$\tan \alpha = \frac{\tan a}{\sin b}$$

e

$$\tan \beta = \frac{\tan b}{\sin a}.$$

Demonstração: Como $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$ e $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}$,

$$\tan \alpha = \tan \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \frac{\tan \frac{\alpha+\beta}{2} + \tan \frac{\alpha-\beta}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha+\beta}{2} \tan \frac{\alpha-\beta}{2}}$$

e

$$\tan \beta = \tan \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \frac{\tan \frac{\alpha+\beta}{2} - \tan \frac{\alpha-\beta}{2}}{1 + \tan \frac{\alpha+\beta}{2} \tan \frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Substituindo nestas duas últimas equações os resultados de $\tan \frac{\alpha+\beta}{2}$ e $\tan \frac{\alpha-\beta}{2}$ dados em (5.13) e (5.14) e simplificando os cálculos, obtemos as duas igualdades pretendidas. ■

5.1.1.3 Triângulos esféricos isósceles

Também podemos retirar algumas igualdades para este tipo de triângulo, por exemplo, no caso em que $\alpha = \beta$ e $a = b$.

Usando as *Leis do Coseno*, anteriormente deduzidas, facilmente se obtêm as igualdades seguintes, se substituirmos α por β e a por b ,

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos d}{1 - \cos \delta}$$

e

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 + \cos \delta}{1 + \cos d}.$$

Também conseguimos mostrar que

$$\tan \frac{d}{2} = \sin \alpha \sin a \tan \frac{\delta}{2}.$$

Demonstração: Pela equação (5.8) temos

$$\tan \frac{\delta}{2} = \frac{1}{\cos a \tan \alpha}. \quad (5.15)$$

A partir da equação (5.10) vamos obter as equações equivalentes seguintes:

$$\begin{aligned} \tan \frac{d}{2} &= \tan a \cos \alpha \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \tan \frac{d}{2} &= \sin a \frac{1}{\cos a} \cos \alpha \sin \alpha \frac{1}{\sin \alpha} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \tan \frac{d}{2} &= \sin a \sin \alpha \frac{1}{\cos a \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \tan \frac{d}{2} &= \sin \alpha \sin a \frac{1}{\cos a \tan \alpha}. \end{aligned}$$

Usando a equação (5.15) obtemos o resultado que queremos demonstrar. ■

5.1.2 Polígono regular de n lados na esfera

Nesta secção vamos analisar os polígonos regulares da esfera e deduzir algumas igualdades, começando pelo triângulo equilátero, que corresponde a um polígono regular de 3 lados.

Triângulos Esféricos Equiláteros

Como o triângulo é equilátero, então, sabemos que os lados do triângulo esférico são congruentes, isto é, $a = b = d$. Pela *Lei dos Cosenos (1)* tiramos que as amplitudes dos ângulos internos deste triângulo são iguais, $\alpha = \beta = \delta$. Seguidamente, vamos deduzir a fórmula

$$\cos \alpha = \frac{\cos a}{1 + \cos a}. \quad (5.16)$$

Demonstração: A partir da *Lei do Coseno (2)* temos que

$$\cos \alpha = -\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos a$$

que é equivalente a

$$(1 + \cos a) \cos^2 \alpha + \cos \alpha - \cos a = 0.$$

Usando a fórmula resolvente para equações do 2º grau, concluímos que

$$\cos \alpha = \frac{\cos a}{1 + \cos a} \quad \vee \quad \cos \alpha = -1.$$

Como a segunda equação é impossível, uma vez que $\alpha < \pi$, fica mostrada a igualdade que queríamos. ■

Também podemos estudar o triângulo equilátero a partir de uma outra sequência fechada de rotações. Seja ABD um triângulo equilátero esférico. Podemos considerar, sem perda de generalidade, o referencial \mathbf{XYZ} (sentido direto), com origem O no centro da esfera, o ponto B a representar o “Pólo Norte” da esfera, o eixo dos \mathbf{X} 's contendo o ponto A e o plano \mathbf{XY} contendo o lado AB do triângulo. Note-se que este lado está contido num meridiano da esfera. Para que ABD seja um triângulo equilátero esférico, então basta que o ponto D pertença ao paralelo que contém o ponto A e que diste de A o mesmo que de B . Verifica-se que o lado BD do triângulo está também contido num meridiano da circunferência.

A composição será fácil de compreender porque contorna por ordem o triângulo esférico ABD ; consiste em repetir *três vezes* a composição das duas rotações $R_\theta^x \circ R_a^z$, isto é,

$$R_\theta^x \circ R_a^z \circ R_\theta^x \circ R_a^z \circ R_\theta^x \circ R_a^z = I,$$

onde a representa o comprimento em radianos do lado do triângulo e $\theta = \pi - \alpha$ representa o ângulo externo do triângulo, que é suplementar ao ângulo interno α .

Será suficiente caracterizar apenas as duas primeiras rotações, repetindo-se o raciocínio a partir da terceira rotação.

– A *primeira* rotação será em torno do eixo dos \mathbf{z}' s, coincidente com o eixo dos \mathbf{Z}' s segundo o ângulo a , representada por R_a^z . Após a rotação, o novo eixo dos \mathbf{x}' s do referencial de rotação que continha o vértice A agora contém o vértice B . O novo eixo dos \mathbf{y}' s tem a direção e sentido do vetor \overrightarrow{OC} , onde o ponto C corresponde à intersecção do equador com o meridiano oposto ao meridiano de A .

– A *segunda* rotação será em torno do novo eixo dos \mathbf{x}' s segundo o ângulo θ , indicada por R_θ^x , onde $\theta = \pi - \alpha$. Realce-se que antes da primeira rotação o plano \mathbf{xy} continha o lado AB do triângulo esférico e que com esta rotação o novo plano \mathbf{xy} irá conter o lado BD do triângulo. Por isso, temos que repetir a composição destas duas rotações, mais duas vezes, para darmos a volta completa ao triângulo. Com a sexta rotação o referencial rodado \mathbf{xyz} irá coincidir de novo com o referencial \mathbf{XYZ} , fixo na esfera. Temos, assim, uma sequência fechada de rotações coincidindo com a identidade.

Usando, agora, o produto que define o operador quaterniônico da sequência fechada de rotações referida, podemos escrever

$$(q_{z,a} q_{x,\theta})^3 = 1,$$

isto é,

$$\left(\cos \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{i} \cos \frac{a}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \mathbf{j} \sin \frac{a}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \mathbf{k} \sin \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right)^3 = 1. \quad (5.17)$$

Podemos simplificar esta notação introduzindo

$$r_0 = \cos \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

e

$$\mathbf{ur}_1 = \mathbf{i} \cos \frac{a}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \mathbf{j} \sin \frac{a}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \mathbf{k} \sin \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

onde \mathbf{u} é o vetor unitário

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{i} \cos \frac{a}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \mathbf{j} \sin \frac{a}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \mathbf{k} \sin \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}}},$$

e

$$r_1 = \left| \mathbf{i} \cos \frac{a}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \mathbf{j} \sin \frac{a}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \mathbf{k} \sin \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right| = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Assim, a expressão (5.17) escreve-se na forma

$$(r_0 + \mathbf{u}r_1)^3 = 1.$$

Ora, sabemos que, dados dois quaterniões $p = p_0 + \mathbf{p}$ e $q = q_0 + \mathbf{q}$ (\mathbf{p} e \mathbf{q} quaterniões puros) o seu produto é

$$pq = p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}.$$

Se aplicarmos esta fórmula a $(r_0 + \mathbf{u}r_1)^3 = 1$, obtemos

$$r_0 (r_0^2 - r_1^2) - 2r_0r_1^2 + \mathbf{u} [r_1 (r_0^2 - r_1^2) + 2r_0^2r_1] = 1.$$

Daqui resulta que a parte vetorial desta equação é zero, ou seja,

$$r_1 (r_0^2 - r_1^2) + 2r_0^2r_1 = 0,$$

que equivale, aplicando a lei do anulamento do produto, a

$$r_1 = 0 \quad \vee \quad 3r_0^2 - r_1^2 = 0.$$

Como $r_1 \neq 0$, se substituirmos na segunda equação os valores de r_0 e r_1 e usarmos um dos casos notáveis da multiplicação, obtemos

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \cos \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2}.$$

A segunda equação é impossível porque a e θ são menores que $\frac{2\pi}{3}$ (realce-se que α tem, no mínimo, a amplitude de $\frac{\pi}{3}$ e a tem, no máximo, o comprimento $\frac{2\pi}{3}$).

A equação que relaciona o comprimento em radianos do lado a e a amplitude do ângulo θ suplementar de um ângulo interno do triângulo equilátero esférico é

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}. \quad (5.18)$$

Podemos tirar algumas conclusões a partir desta equação:

- quando $a \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \frac{2\pi}{3}$ e $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{3}$;

- se $a = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha = \frac{\pi}{2}$;
- quando $a \rightarrow \frac{2\pi}{3}$, $\theta \rightarrow 0$ e $\alpha \rightarrow \pi$;
- como $0 < a < \frac{2\pi}{3}$ então $\frac{2\pi}{3} > \theta > 0$ e $\frac{\pi}{3} > \alpha > \pi$.

Quadrados Esféricos

Vamos considerar um polígono regular de 4 lados na esfera. Então, a medida em radianos dos lados são iguais e as amplitudes dos ângulos internos também são iguais. Seja a o lado, α o ângulo interno do quadrado esférico e $\theta = \pi - \alpha$ o seu suplementar (ângulo externo do quadrado). Vamos estudar este polígono repetindo *quatro vezes* a mesma composta de rotações utilizada no triângulo equilátero esférico.

De modo semelhante, para o quadrado esférico, somos conduzidos à resolução da equação

$$(r_0 + \mathbf{u}r_1)^4 = 1$$

que equivale a

$$[(r_0^2 - r_1^2) - 4r_0^2r_1^2] + \mathbf{u} [4r_0r_1(r_0^2 - r_1^2)] = 1.$$

Mais uma vez, temos que a parte vetorial da equação anterior é zero, sendo

$$4r_0r_1(r_0^2 - r_1^2) = 0,$$

isto é,

$$r_0 = 0 \quad \vee \quad r_1 = 0 \quad \vee \quad r_0^2 - r_1^2 = 0.$$

Como as duas primeiras equações são impossíveis, então, desenvolvemos a terceira equação substituindo, de modo análogo, os valores de r_0 e r_1 e aplicamos o caso notável da multiplicação que dá a diferença entre dois quadrados. Obtém-se assim

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad \cos \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A segunda equação é impossível porque a e θ são menores que $\frac{\pi}{2}$ (note-se que α tem, no mínimo, a amplitude de $\frac{\pi}{2}$ e a tem, no máximo, o comprimento $\frac{\pi}{2}$).

A equação obtida, representada a seguir, relaciona a medida do lado a e o ângulo θ suplementar do ângulo interno α do quadrado esférico

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (5.19)$$

Também podemos tirar algumas conclusões a partir desta equação:

- quando $a \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$;
- quando $a \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\theta \rightarrow 0$ e $\alpha \rightarrow \pi$;
- como $0 < a < \frac{\pi}{2}$ então $\frac{\pi}{2} > \theta > 0$ e $\frac{\pi}{2} > \alpha > \pi$.

Pentágono Regular Esférico

Consideremos um polígono regular de 5 lados na superfície esférica. Seja a o lado e $\theta = \pi - \alpha$ o ângulo suplementar do ângulo interno α do pentágono regular esférico. Vamos estudar este polígono, de modo análogo, usando a repetição de *cinco vezes* a composta de rotações anterior.

Para o pentágono regular esférico, somos conduzidos à equação

$$(r_0 + \mathbf{u}r_1)^5 = 1$$

que equivale a

$$[r_0 (r_0^2 - r_1^2) (r_0^2 - 5r_1^2) - 4r_0^3 r_1^2] + \mathbf{u} [r_1 (r_0^2 - r_1^2) (5r_0^2 - r_1^2) - 4r_0^2 r_1^3] = 1.$$

Mais uma vez, temos que a parte vetorial da equação anterior é zero, que equivale a

$$r_1 (r_0^2 - r_1^2) (5r_0^2 - r_1^2) - 4r_0^2 r_1^3 = 0.$$

Como $r_1 \neq 0$, então temos

$$(r_0^2 - r_1^2) (5r_0^2 - r_1^2) - 4r_0^2 r_1^2 = 0.$$

Se substituirmos nesta equação os valores de r_0 e r_1 e usarmos a fórmula resolvente, obtemos

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}} \quad \vee \quad \cos \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}}.$$

A equação obtida, representada a seguir, relaciona a medida do lado a e o ângulo θ suplementar do ângulo interno α do pentágono esférico

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}. \quad (5.20)$$

Note-se que esta condição era a única possível das condições obtidas anteriormente. O lado a e θ são menores que $\frac{2\pi}{5}$ (α tem, no mínimo, a amplitude de $\frac{3\pi}{5}$ e a tem, no máximo, o comprimento $\frac{2\pi}{5}$).

Também podemos tirar algumas conclusões a partir da equação (5.20):

- quando $a \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \frac{2\pi}{5}$ e $\alpha \rightarrow \frac{3\pi}{5}$;
- quando $a \rightarrow \frac{2\pi}{5}$, $\theta \rightarrow 0$ e $\alpha \rightarrow \pi$;
- como $0 < a < \frac{2\pi}{5}$ então $\frac{2\pi}{5} > \theta > 0$ e $\frac{3\pi}{5} > \alpha > \pi$.

Hexágono Regular Esférico

Consideremos um polígono regular de 6 lados na superfície esférica. Seja a o lado e $\theta = \pi - \alpha$ o ângulo suplementar do ângulo interno α do hexágono regular esférico. Da mesma maneira, vamos usar a equação seguinte para estudar o hexágono regular esférico

$$(r_0 + \mathbf{u}r_1)^6 = 1.$$

Esta equação é equivalente a

$$(r_0^2 - r_1^2)(r_0^4 + r_1^4 - 14r_0^2r_1^2) + \mathbf{u} \left[6r_0r_1(r_0^2 - r_1^2)^2 - 8r_0^3r_1^3 \right] = 1.$$

Donde, temos que a parte vetorial da equação anterior é zero, isto é,

$$6r_0r_1(r_0^2 - r_1^2)^2 - 8r_0^3r_1^3 = 0.$$

Como $r_0 \neq 0$ e $r_1 \neq 0$, então temos

$$3(r_0^2 - r_1^2)^2 - 4r_0^2r_1^2 = 0.$$

Se substituirmos nesta equação os valores de r_0 e r_1 e usarmos a formula resolvente obtemos

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \cos \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \pm \frac{1}{2}.$$

A equação obtida, representada a seguir, relaciona a medida do lado a e o ângulo θ suplementar do ângulo interno α do hexágono esférico

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (5.21)$$

Note-se que esta condição era a única possível das condições obtidas anteriormente. O lado a e θ são menores que $\frac{\pi}{3}$ (α tem, no mínimo, a amplitude de $\frac{2\pi}{3}$ e a tem, no máximo, o comprimento $\frac{\pi}{3}$).

Também podemos tirar algumas conclusões a partir da equação (5.21):

- quando $a \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}$ e $\alpha \rightarrow \frac{2\pi}{3}$;
- quando $a \rightarrow \frac{\pi}{3}$, $\theta \rightarrow 0$ e $\alpha \rightarrow \pi$;
- como $0 < a < \frac{\pi}{3}$ então $\frac{\pi}{3} > \theta > 0$ e $\frac{2\pi}{3} > \alpha > \pi$.

Polígono Regular de $k \geq 7$ lados na esfera

A partir das equações (5.18), (5.19), (5.20) e (5.21), que relacionam o lado a com o ângulo θ suplementar do ângulo interno α dos polígonos esféricos regulares com 3, 4, 5 e 6 lados, respetivamente, podemos **conjeturar** uma equação que relaciona o lado e o ângulo suplementar do ângulo interno de um polígono regular esférico de k lados.

Como o ângulo interno α de um *polígono regular plano* de k lados é dado por

$$\alpha = \frac{k-2}{k}\pi,$$

então o ângulo θ suplementar de α é

$$\theta = \pi - \alpha = \frac{2}{k}\pi$$

\Updownarrow

$$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{k}.$$

A situação anterior acontece na esfera quando o lado a do polígono regular esférico tende para zero (implicando que $\cos \frac{a}{2}$ tende para 1). Atendendo à afirmação

anterior e voltando aos resultados anteriores (5.18), (5.19), (5.20) e (5.21), note-se que são, respetivamente, equivalentes às equações

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\pi}{3},$$

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\pi}{4},$$

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\pi}{5},$$

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\pi}{6}.$$

O que nos leva a conjecturar a seguinte fórmula

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\pi}{k}, \quad (5.22)$$

que relaciona o lado a de um polígono esférico regular de k lados com o ângulo θ , suplementar do ângulo interno α do polígono.

Podemos também tirar algumas conclusões a partir do resultado anterior:

- quando $a \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \frac{2}{k}\pi$ e $\alpha \rightarrow \frac{k-2}{k}\pi$;
- quando $a \rightarrow \frac{2}{k}\pi$, $\theta \rightarrow 0$ e $\alpha \rightarrow \pi$;
- como $0 < a < \frac{2}{k}\pi$ então $\frac{2}{k}\pi > \theta > 0$ e $\frac{k-2}{k}\pi > \alpha > \pi$.

5.2 Exemplo do uso de quaterniões na aeronáutica

Vamos explorar quaternionicamente uma das sequências eixo-ângulo de Euler mais usada na ciência da navegação aérea. Vamos aplicar o teorema de Euler, já enunciado neste trabalho, e relacionar dois referenciais independentes (um posicionado na Terra e o outro no avião) através desta sequência.

Um dos instrumentos principais de voo que se encontra no cockpit dos aviões corresponde ao “*Heading and Attitude indicator*” que dá ao piloto uma informação contínua do estado do avião relativamente a um local na superfície terrestre. Este aparelho relata em cada instante a orientação do referencial no avião para um referencial posicionado num local da Terra.

O referencial do avião \mathbf{xyz} tem a sua origem no centro de gravidade do avião. A parte positiva do eixo dos $\mathbf{x}'s$ aponta para o nariz do avião ao longo do seu eixo longitudinal. O eixo dos $\mathbf{y}'s$ do avião tem a direção das asas e a parte positiva aponta para a asa direita. O eixo positivo dos $\mathbf{z}'s$ é normal aos eixos dos $\mathbf{x}'s$ e dos $\mathbf{y}'s$, a apontar para baixo.

O referencial de referência na Terra \mathbf{XYZ} tem de origem, chamemos O , num local na superfície terrestre. O plano \mathbf{XY} é o plano tangente à Terra sendo O o seu ponto de tangência. O eixo dos $\mathbf{X}'s$ aponta para o Norte e o eixo dos $\mathbf{Y}'s$ aponta para Este. O eixo dos $\mathbf{Z}'s$, normal ao plano \mathbf{XY} , aponta para o interior da Terra.

De seguida, indicamos uma composição de três rotações (sequência eixo-ângulo de Euler \mathbf{zyx}) que irão posicionar o referencial local \mathbf{XYZ} com a mesma orientação do referencial \mathbf{xyz} que está no avião.

– A *primeira* rotação será em torno do eixo dos $\mathbf{Z}'s$ segundo um ângulo ψ , chamado de “*Heading*”. Após esta rotação o novo eixo dos $\mathbf{X}'s$ ($\mathbf{X}_1's$) ficará com a mesma direção da projeção do eixo dos $\mathbf{x}'s$ no plano \mathbf{XY} , isto é, dá-nos o desvio relativamente ao Norte que o avião apresenta. Este ângulo também nos informa se o nariz do avião está virado para a direita ou para a esquerda relativamente ao Norte.

– A *segunda* rotação será em torno do novo eixo dos $\mathbf{Y}'s$ ($\mathbf{Y}_1's$) segundo um ângulo θ , o ângulo “*Elevation*”. Após esta rotação o eixo dos $\mathbf{X}_1's$ ficará com a mesma orientação do eixo dos \mathbf{x} do avião. Este ângulo representa a inclinação do avião, também nos informa se o nariz do avião está para cima ou para baixo, se está a subir ou a descer.

– A *terceira* rotação será em torno do eixo dos $\mathbf{X}_1's$ segundo um ângulo φ , o ângulo “*Bank*”. Após esta rotação o referencial de referência na Terra tem a mesma orientação que o referencial no avião. Este último ângulo dá-nos a torção que o avião apresenta e também nos informa se o avião está de cabeça para baixo, voltado ao contrário.

A composição de rotações

$$R_\varphi^x \circ R_\theta^y \circ R_\psi^z$$

e os seus correspondentes ângulos de Euler relacionam o sistema de eixos coordenados do avião ao sistema de eixos coordenados de referência localizado na Terra.

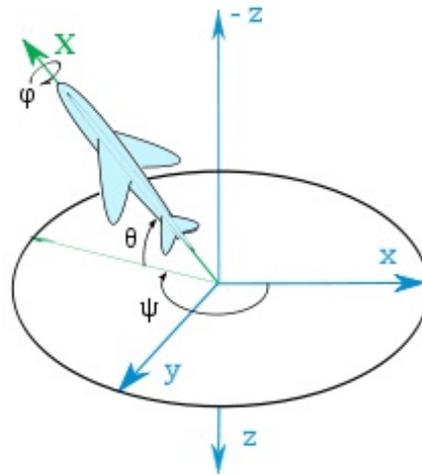


Figura 5.2: Ângulos: “Heading” (ψ), “Elevation” (θ), “Bank” (ϕ)

[Imagem do site: http://en.wikipedia.org/wiki/Axes_conventions]

Os ângulos de orientação *Heading*, *Elevation* e *Bank* são chamados frequentemente de “*Yaw*”, “*Pitch*” e “*Roll*”, respectivamente. Na realidade os ângulos *Heading*, *Elevation* e *Bank* (fig. 5.2) definem o estado do avião e “*Yaw*”, “*Pitch*” e “*Roll*” (fig. 5.3) são as perturbações angulares desse estado [Kui02, p. 205].

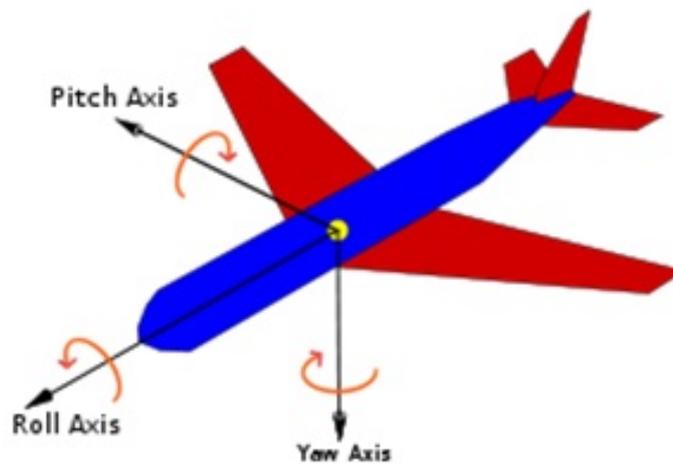


Figura 5.3: “Yaw”, “Pitch” e “Roll”

[Imagem do site: http://en.wikipedia.org/wiki/Aircraft_principal_axes]

5.2.1 Análise matricial

Vamos começar por determinar a matriz composta que corresponde a uma matriz de rotação e que é obtida pelo produto das matrizes seguintes:

$$\begin{aligned}
 R &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \sin \theta \cos \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi & \sin \varphi \sin \theta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi & \cos \varphi \sin \theta \sin \psi - \sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Esta matriz pode ser vista como uma única rotação em torno de algum eixo, em geral um eixo que não pertence aos eixos coordenados, que leva o referencial de referência localizado na Terra no referencial do corpo (o avião, no nosso caso).

O ângulo δ da rotação composta representada pela matriz R é obtido através da fórmula (4.21):

$$\cos \delta = \frac{\text{Tr}(R) - 1}{2},$$

isto é,

$$\cos \delta = \frac{\cos \theta \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta - 1}{2}. \quad (5.23)$$

Usamos agora o resultado (4.19) para obter o eixo de rotação \mathbf{v} da matriz R . Se

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \quad (5.24)$$

então

$$\begin{aligned}
 v_1 &= -a_{13}(a_{22} - 1) + a_{23}a_{12} = \sin \varphi \sin \psi + \sin \theta \cos \varphi \cos \psi - \sin \theta, \\
 v_2 &= -a_{23}(a_{11} - 1) + a_{21}a_{13} = -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta, \\
 v_3 &= (a_{11} - 1) + (a_{22} - 1) - a_{21}a_{12} = \\
 &= \cos \theta \cos \varphi - \cos \theta \cos \psi - \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \theta \sin \psi + 1.
 \end{aligned}$$

5.2.2 Análise quaterniônica

Seja $L_q = L_{q_{x,\varphi}} \circ L_{q_{y,\theta}} \circ L_{q_{z,\psi}}$ o operador quaterniônico de rotação correspondente à composição de rotações anteriormente introduzidas. Como sabemos

$$q_{z,\psi} = \cos \frac{\psi}{2} + \mathbf{k} \sin \frac{\psi}{2},$$

$$q_{y,\theta} = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{j} \sin \frac{\theta}{2}$$

e

$$q_{x,\varphi} = \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{i} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Como temos uma composição de rotações dos eixos coordenados de um referencial, então, o operador quaterniônico L_q vai ser igual ao operador quaterniônico

$$L_{q_{z,\psi} q_{y,\theta} q_{x,\varphi}},$$

isto é, o produto quaterniônico apropriado para representar a composta é dado por

$$q = q_{z,\psi} q_{y,\theta} q_{x,\varphi} = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3$$

onde, após os cálculos efetuados, obtemos

$$q_0 = \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2},$$

$$q_1 = \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2},$$

$$q_2 = \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2}$$

e

$$q_3 = \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2}.$$

Se o ângulo da rotação composta é δ , então a partir do produto quaterniônico sabemos que

$$\cos \frac{\delta}{2} = q_0 = \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2}. \quad (5.25)$$

Note-se que as equações (5.23) e (5.25) são equivalentes. Para ver que assim é, basta efetuar alguns cálculos e utilizar as fórmulas trigonométricas $\cos \delta = 2 \cos^2 \frac{\delta}{2} - 1$ e $\cos \delta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2}$.

O eixo de rotação é dado pelo vetor

$$\mathbf{v}' = (q_1, q_2, q_3). \quad (5.26)$$

Também ficamos a saber que os vetores apresentados em (5.24) e (5.26) são colineares, uma vez que representam o eixo da mesma rotação.

É de realçar a facilidade com que obtivemos o ângulo e o eixo da rotação usando os quaterniões.

5.2.3 *Gimbal lock*

Quando se utiliza uma *sequência eixo-ângulo de Euler* pode ocorrer a situação que se designa por “*Gimbal lock*”, também conhecida por *bloqueio de Cardano*. Um “*Gimbal*” é um dispositivo análogo a um giroscópio, sendo formado por três anéis, ou arcos, que se podem movimentar livremente em torno de um eixo, sendo cada um desses anéis, eles próprios, também designados por *gimbals*.

Se \mathbf{xyz} for um referencial ortonormado com origem no centro de gravidade de um objeto, podemos fazer corresponder a cada eixo um “*gimbal*”. O “*gimbal*” correspondente ao eixo \mathbf{z} representa um arco centrado na origem do referencial e contido no plano \mathbf{xy} . Do mesmo modo, o “*gimbal*” correspondente ao eixo \mathbf{y} e eixo \mathbf{x} representam os arcos centrados na origem do referencial contidos nos planos \mathbf{xz} e \mathbf{yz} , respetivamente.

É de notar que, na composta de rotações \mathbf{zyx} de ângulos de Euler apresentada anteriormente, quando se dá a *primeira* rotação, R_ψ^z , todos os *gimbals* se movem. Quando se efetua a *segunda* rotação, R_θ^y , os *gimbals* dos eixos \mathbf{y} e \mathbf{x} rodam. Mas, com a *terceira* rotação, R_φ^x , apenas roda o *gimbal* deste eixo.

O dispositivo “*Gimbal*” é usado, por exemplo, nos aviões para dar a informação ao piloto da orientação do avião relativamente ao solo. O efeito “*Gimbal Lock*” ocorre quando o avião roda em torno do eixo \mathbf{y} segundo o ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$, isto é, quando o avião aponta para cima (fig. 5.4). Nesta altura os eixos \mathbf{x} e \mathbf{z} ficam sobrepostos mas com sentidos diferentes, representando o mesmo eixo e os seus *gimbals* coincidem perdendo-se assim um grau de liberdade. É de reparar que o *gimbal* do eixo \mathbf{x} movimentou-se até ao *gimbal* do eixo \mathbf{z} que se encontrava estático até ficarem contidos no mesmo plano.

Neste instante o sistema “bloqueia”, isto é, produz o mesmo efeito quando um objeto roda em torno dos eixos \mathbf{x} e \mathbf{z} .

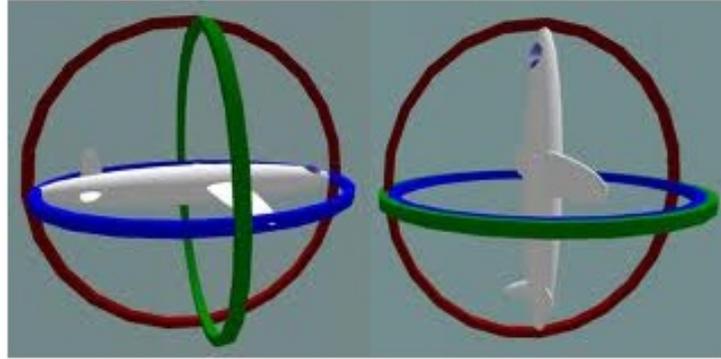


Figura 5.4: “*Gimbal lock*”

[Imagem tirada do site: <http://kyruie.tistory.com/80>]

Vamos estudar matricialmente o efeito *Gimbal Lock* e notar que, de facto, se perde um grau de liberdade.

Como o ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ e $\sin \theta = \sin \frac{\pi}{2} = 1$, então tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \sin(\varphi - \psi) & \cos(\varphi - \psi) & 0 \\ \cos(\varphi - \psi) & -\sin(\varphi - \psi) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

representa a matriz composta. Como se nota, esta matriz depende apenas dos ângulos ψ e φ .

É de salientar, mais uma vez, que o movimento do avião quando roda segundo o eixo \mathbf{x} (*Roll*), apesar de mover apenas o seu *gimbal*, realiza o mesmo movimento como quando o rodamos segundo o eixo \mathbf{z} (*Yaw*), mas que neste caso move todos os *gimbals* associados a cada um dos eixos. Note-se, por isso, que como os eixos \mathbf{x} e \mathbf{z} têm sentidos contrários que a matriz composta é a mesma quando os ângulos φ e ψ

são simétricos. Isto é, se $\varphi = -\psi$, então

$$\begin{aligned} R &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \sin(\varphi - \psi) & \cos(\varphi - \psi) & 0 \\ \cos(\varphi - \psi) & -\sin(\varphi - \psi) & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \sin(-2\psi) & \cos(-2\psi) & 0 \\ \cos(-2\psi) & -\sin(-2\psi) & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \sin(2\varphi) & \cos(2\varphi) & 0 \\ \cos(2\varphi) & -\sin(2\varphi) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

verificando-se que a matriz composta é a mesma, ou seja, o movimento do avião é exatamente o mesmo.

Aqui foi apenas explorado o caso de $\theta = \frac{\pi}{2}$ mas é evidente que este fenómeno também ocorre quando temos o avião com o nariz apontado para baixo, isto é, quando temos $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Para evitar o efeito *gimbal lock* basta não aproximar o avião destes ângulos críticos.

Um conhecido incidente onde esta situação aconteceu foi na missão à Lua da Apollo. Um modo de remediar situações como estas seria introduzir um quarto *gimbal*, mas David Hoag (diretor de desenho técnico do laboratório Apollo), quando questionado sobre o assunto afirmou¹:

The advantages of the redundant gimbal seem to be outweighed by the equipment simplicity, size advantages, and corresponding implied reliability of the direct three degree of freedom unit.

Os engenheiros desta missão conscientes de que este problema poderia ocorrer optaram por usar um indicador que seria acionado perto da inclinação de 85 graus. Paul Fjeld explicou que o computador avisou do perigo de ocorrer *gimbal lock* aos 70 graus e que desligou o “IMU — *Inertial Measurement Unit*” aos 85 graus. Este

¹A simplicidade do equipamento, as vantagens em termos de tamanho e a correspondente confiança implícita nos três graus de liberdade parecia superada relativamente às vantagens em acrescentar mais um *gimbal*.

aparelho eletrônico mede e dá a informação da velocidade, orientação e das forças gravitacionais da aeronave.

A partir daquele ponto a nave espacial teve que ser afastada da posição *gimbal lock* manualmente e a plataforma também foi alinhada manualmente utilizando como referência as estrelas. Depois da aterragem do módulo lunar, astronauta Mike Collins a bordo do Módulo de Comando, brincou ao dizer “*How about sending me a fourth gimbal for Christmas?*” [Wika12]

Outra solução para evitar estas situações passa por utilizar os quaterniões unitários. De facto, qualquer quaternião unitário está associado a um operador de rotação representando uma rotação em 3D de um determinado ângulo, seja α , em torno de um eixo com a direção de um vetor normalizado, por exemplo, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ sendo representado por

$$q = (\cos(\alpha/2), u_1 \sin(\alpha/2), u_2 \sin(\alpha/2), u_3 \sin(\alpha/2)).$$

Intuitivamente, se entende que um quaternião descreve a rotação com um único movimento.

Esta é uma das vantagens de se utilizar quaterniões em comparação com os três movimentos que são necessários realizar pelas três rotações sucessivas de ângulos de Euler. Os ângulos de Euler são, por isso, usados na representação de rotações que são adequadamente restringidas a um determinado domínio [Kor68, p. 478].

Mais à frente neste trabalho iremos falar nas vantagens e desvantagens da utilização das rotações de ângulos de Euler e dos quaterniões.

5.3 Exemplo do uso de quaterniões em engenharia aeroespacial

Conseguimos obter a nossa posição sobre a Terra (latitude e longitude), a hora e a altitude acima do nível médio do mar através dos vários satélites artificiais que giram à volta da Terra e que demoram aproximadamente 12 horas a dar uma volta completa. Estes satélites enviam continuamente para a Terra ondas de rádio. Estas ondas podem ser captadas por antenas e também por um aparelho que capta estes

sinais de rádio, que se designa GPS (Sistema de Posicionamento Global). Podemos receber sempre os sinais de cinco a oito desses satélites, em qualquer ponto da Terra. O aparelho GPS, ao receber pelo menos os sinais de quatro satélites, tem uma calculadora programada para determinar a latitude e a longitude do local onde se encontra. Os aviões e os navios estão equipados com receptores GPS. No entanto, os navios têm sempre um sextante a bordo, por razões de segurança, porque a receção de sinais pelo GPS depende das condições atmosféricas [Dil99].

A *efeméride orbital* de um satélite é uma tábua dos valores da longitude e latitude da sua localização ao longo do tempo. Nesta secção vamos estudar e determinar num dado momento, usando quaterniões, a efeméride de um satélite artificial (representado na figura 5.5 pelo ponto R) que orbita próximo da Terra e que se encontra na vertical de um ponto P na superfície terrestre.

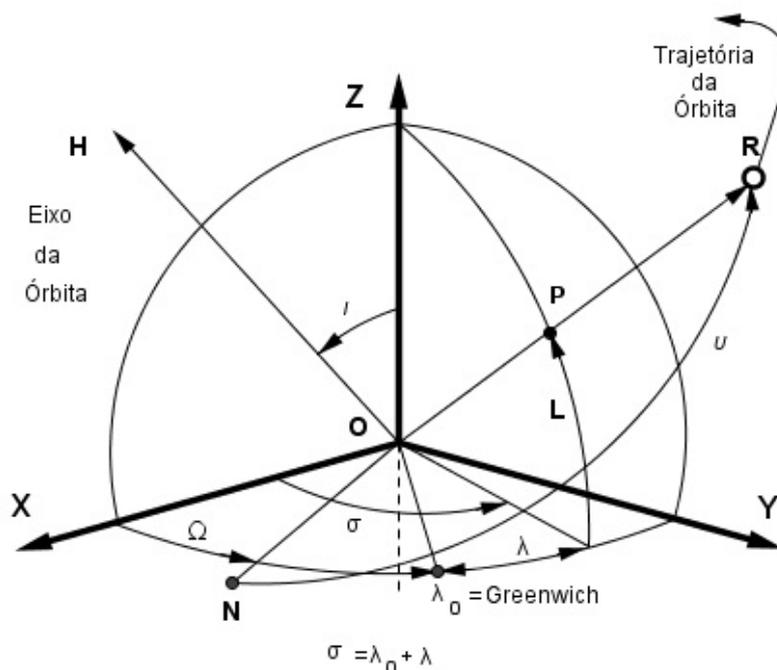


Figura 5.5: Trajetória Orbital de um satélite artificial
[Imagem realizada no programa Geogebra]

Consideremos um referencial de referência na Terra, \mathbf{XYZ} , com origem no centro da Terra, que designaremos por O . O plano \mathbf{XY} é o plano equatorial da Terra. O eixo dos \mathbf{X} 's aponta para a *Constelação de Carneiro*. A reta OX representa a *linha dos Equinócios* (intersecção do *Plano Equatorial da Terra* e o *Plano Orbital da*

Terra), onde o ponto X representa a interseção da parte positiva do eixo dos $\mathbf{X}'s$ com o equador. O eixo dos $\mathbf{Z}'s$ é normal ao plano \mathbf{XY} e tal que o referencial \mathbf{XYZ} tenha a orientação positiva.

O ponto na órbita do satélite, que se move do Sul para o Norte, que intersesta o equador, que designaremos por N , é chamado o *nodo ascendente*. Ao ponto oposto da órbita, onde o satélite se move do Norte para o Sul, e que intersesta o equador, chamamos *nodo descendente*. A reta que une estes dois pontos, ou seja, a reta ON , é chamada *reta dos nodos*, que também corresponde à interseção do plano equatorial com o plano NOR (*plano orbital do satélite*) [Dar07].

Nesta secção vamos usar duas sequências eixo-ângulo de Euler para determinar a *Efeméride Orbital* de um satélite que orbita próximo da Terra, sugerida por Jack Kuipers [Kui02, pp. 86–91]. Estas duas composições serão equivalentes e vamos poder equacionar os elementos correspondentes e retirar relações entre eles.

Vamos começar por estudar a sequência eixo-ângulo de Euler (\mathbf{zxz}) que alguns autores referem como a primeira composição utilizada por Euler no seu trabalho sobre mecânica orbital.

5.3.1 Composição orbital de ângulos de Euler

Vamos definir a orientação do plano orbital através da composta \mathbf{zxz} de ângulos de Euler, que é conhecida como *Composição Orbital de Ângulos de Euler*, a partir do referencial de referência na Terra descrito anteriormente. Estes ângulos, Ω, ι, ν , são determinados do seguinte modo:

- A *primeira* rotação será em torno do eixo dos $\mathbf{Z}'s$ segundo o ângulo Ω . Após a rotação, o novo eixo dos $\mathbf{X}'s$ ($\mathbf{X}_1's$) vai conter o ponto N .

- A *segunda* rotação será em torno do eixo dos $\mathbf{X}_1's$ de ângulo ι . É usual chamar-se ao ângulo ι de ângulo de inclinação do plano orbital. Com esta rotação, o eixo dos $\mathbf{Y}_2's$ fica contido no plano orbital, plano NOR , e o eixo dos $\mathbf{Z}_1's$ será normal a este plano sendo representado na figura pelo eixo OH que corresponde ao eixo de rotação da órbita do satélite.

- A *terceira* rotação será em torno do eixo dos $\mathbf{Z}_1's$ de ângulo ν . Nesta altura

vamos ter o eixo dos \mathbf{X}_2 's a apontar para o satélite que orbita, contendo os pontos P e R .

Concluindo, o referencial orbital tem origem geocêntrica; o eixo dos \mathbf{x} 's contém o satélite que orbita; o eixo dos \mathbf{z} 's é normal ao plano orbital do satélite (tem a direção do vetor da velocidade angular orbital do satélite); o eixo dos \mathbf{y} 's está direcionado de modo a que o referencial tenha o sentido direto e está contido no plano orbital do satélite.

5.3.2 Composição da efeméride orbital

Vamos definir, mais uma vez, a orientação do referencial orbital, mas agora, através da composta \mathbf{zyx} de ângulos de Euler, que é conhecida como *Composição Aeroespacial de ângulos de Euler* (já vista anteriormente), a partir do referencial de referência na Terra descrito no início do estudo desta aplicação.

Vamos definir esta composição \mathbf{zyx} que chamaremos de *Composição da Efeméride Orbital* de modo que seja equivalente à composição anterior (\mathbf{zxz} - *Composição Orbital de Ângulos de Euler*).

– A *primeira* rotação será em torno do eixo dos \mathbf{Z}' s segundo o ângulo σ . Após a rotação, o novo eixo dos \mathbf{X}' s (\mathbf{X}_1 's) vai conter o ponto Q (este ponto corresponde à intersecção da linha do equador com o meridiano que passa pelo ponto P , logo, têm a mesma longitude).

– A *segunda* rotação será em torno do eixo dos \mathbf{Y}_1 's de ângulo $-L$. O ângulo L representa a latitude do ponto P . Após esta rotação, o eixo dos \mathbf{X}_2 's vai conter os pontos P e R e o eixo dos \mathbf{Y}_1 's continua no plano equatorial. Repare-se que, como esta rotação tem sentido contrário à orientação do referencial o ângulo é negativo.

– A *terceira* rotação será em torno do eixo dos \mathbf{X}_2 's segundo o ângulo α . Com esta rotação o eixo dos \mathbf{Y}_2 's fica contido no plano NOR e o eixo dos \mathbf{Z}_2 's é normal a este plano representado, uma vez mais, na figura pelo eixo OH que corresponde ao eixo de rotação da órbita do satélite.

Com esta sequência eixo-ângulo de Euler (\mathbf{zyx} - *Composição da Efeméride Orbital*) obtivemos, uma vez mais, a orientação do referencial orbital do satélite, que

é equivalente à sequência eixo-ângulo de Euler ($\mathbf{z}\mathbf{x}\mathbf{z}$ - *Composição Orbital de Ângulos de Euler*).

5.3.3 Análise quaterniônica

Em primeiro lugar, vamos clarificar o significado dos ângulos que estão envolvidos nas duas composições de rotações de ângulos de Euler apresentadas nas secções anteriores, antes de realizar o estudo quaterniônico:

- Ω — ângulo segundo o centro da Terra vê a constelação de Carneiro e o ponto N ;
- ι — ângulo de inclinação do plano orbital do satélite (ângulo formado pelos planos equatorial da Terra e orbital do satélite);
- ν — ângulo NOR ($\nu = \omega_0 t$, onde ω_0 representa a velocidade angular);
- $\sigma = \lambda_0 + \lambda$;
- λ_0 — ângulo formado pelo eixo dos $\mathbf{X}'s$ com OG , sendo G a interseção do equador com o *meridiano de Greenwich* ;
- λ — longitude da efeméride orbital (longitude do ponto P);
- L — latitude da efeméride orbital (latitude do ponto P);
- α — ângulo da direção do caminho da efeméride ou ângulo do movimento orbital.

Os parâmetros ν , σ , L e α dependem do tempo e das velocidades angulares das órbitas da Terra e do satélite. No entanto, neste estudo quaterniônico vamos apenas abordar as relações existentes entre os parâmetros da efeméride λ , L e α e os parâmetros orbitais Ω , ι e ν , que são conhecidos.

Vamos começar por representar os quaterniões apropriados para a Composição Orbital de Ângulos de Euler, a saber

$$q_{z,\Omega} = \cos \frac{\Omega}{2} + \mathbf{k} \sin \frac{\Omega}{2},$$

$$q_{x,\iota} = \cos \frac{\iota}{2} + \mathbf{i} \sin \frac{\iota}{2}$$

e

$$q_{z,\nu} = \cos \frac{\nu}{2} + \mathbf{k} \sin \frac{\nu}{2}.$$

O produto quaterniônico que representa o operador rotacional $L_{q_{z,\Omega} q_{x,\iota} q_{z,\nu}}$ desta composição é dado por:

$$\begin{aligned} q_{z,\Omega} q_{x,\iota} q_{z,\nu} &= \cos \frac{\Omega}{2} \cos \frac{\iota}{2} \cos \frac{\nu}{2} - \sin \frac{\Omega}{2} \cos \frac{\iota}{2} \sin \frac{\nu}{2} + \\ &+ \mathbf{i} \left(\cos \frac{\Omega}{2} \sin \frac{\iota}{2} \cos \frac{\nu}{2} + \sin \frac{\Omega}{2} \sin \frac{\iota}{2} \sin \frac{\nu}{2} \right) + \\ &+ \mathbf{j} \left(-\cos \frac{\Omega}{2} \sin \frac{\iota}{2} \sin \frac{\nu}{2} + \sin \frac{\Omega}{2} \sin \frac{\iota}{2} \cos \frac{\nu}{2} \right) + \\ &+ \mathbf{k} \left(\cos \frac{\Omega}{2} \cos \frac{\iota}{2} \sin \frac{\nu}{2} + \sin \frac{\Omega}{2} \cos \frac{\iota}{2} \cos \frac{\nu}{2} \right). \end{aligned}$$

De seguida, vamos fazer a mesma análise quaterniônica para a Composição da Efeméride Orbital começando por representar os quaterniões associados às rotações desta composta, que são

$$\begin{aligned} q_{z,\sigma} &= \cos \frac{\sigma}{2} + \mathbf{k} \sin \frac{\sigma}{2}, \\ q_{y,-L} &= q_{y,L}^* = \cos \frac{L}{2} - \mathbf{j} \sin \frac{L}{2} \\ q_{x,\alpha} &= \cos \frac{\alpha}{2} + \mathbf{i} \sin \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

O produto quaterniônico que representa o operador rotacional $L_{q_{z,\sigma} q_{y,L}^* q_{x,\alpha}}$ desta composta é dado por:

$$\begin{aligned} q_{z,\sigma} q_{y,L}^* q_{x,\alpha} &= \cos \frac{\sigma}{2} \cos \frac{L}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\sigma}{2} \sin \frac{L}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + \\ &+ \mathbf{i} \left(\cos \frac{\sigma}{2} \cos \frac{L}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\sigma}{2} \sin \frac{L}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \\ &+ \mathbf{j} \left(\sin \frac{\sigma}{2} \cos \frac{L}{2} \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\sigma}{2} \sin \frac{L}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \\ &+ \mathbf{k} \left(\sin \frac{\sigma}{2} \cos \frac{L}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\sigma}{2} \sin \frac{L}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

Como as compostas de rotação Orbital de Ângulos de Euler e Efeméride Orbital são equivalentes, então sabemos que

$$q_{z,\sigma} q_{y,L}^* q_{x,\alpha} = q_{z,\Omega} q_{x,\iota} q_{z,\nu}.$$

Antes de equacionarmos as componentes correspondentes vamos fazer uma simplificação de modo a tornar os cálculos mais simples. Vamos começar por multiplicar ambos os membros, pelo lado esquerdo, da equação anterior por $q_{z,\sigma}^*$, obtendo uma equação equivalente, a saber,

$$q_{y,L}^* q_{x,\alpha} = q_{z,\sigma}^* q_{z,\Omega} q_{x,\iota} q_{z,\nu}.$$

De seguida, considerando $\Omega - \sigma = \psi$, podemos ainda escrever

$$q_{y,L}^* q_{x,\alpha} = q_{z,\psi} q_{x,\iota} q_{z,\nu}.$$

A partir desta equação igualando as correspondentes componentes, obtêm-se várias relações, como

$$q_{y,L}^* q_{x,\alpha} = \cos \frac{L}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \mathbf{i} \cos \frac{L}{2} \sin \frac{\alpha}{2} - \mathbf{j} \sin \frac{L}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \mathbf{k} \sin \frac{L}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$$

e

$$\begin{aligned} q_{z,\Omega} q_{x,\iota} q_{z,\nu} &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\iota}{2} \cos \frac{\nu}{2} - \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\iota}{2} \sin \frac{\nu}{2} + \\ &+ \mathbf{i} \left(\cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\iota}{2} \cos \frac{\nu}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\iota}{2} \sin \frac{\nu}{2} \right) + \\ &+ \mathbf{j} \left(\sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\iota}{2} \cos \frac{\nu}{2} - \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\iota}{2} \sin \frac{\nu}{2} \right) + \\ &+ \mathbf{k} \left(\sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\iota}{2} \cos \frac{\nu}{2} + \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\iota}{2} \sin \frac{\nu}{2} \right) \end{aligned}$$

vamos obter as equações

$$\cos \frac{L}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\iota}{2} \cos \frac{\nu + \psi}{2}, \quad (5.27)$$

$$\cos \frac{L}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\iota}{2} \cos \frac{\nu - \psi}{2}, \quad (5.28)$$

$$\sin \frac{L}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\iota}{2} \sin \frac{\nu - \psi}{2} \quad (5.29)$$

e

$$\sin \frac{L}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\iota}{2} \sin \frac{\nu + \psi}{2}. \quad (5.30)$$

Vamos usar estas quatro equações para obter as expressões a partir das quais os parâmetros λ , L e α podem ser determinados. Se dividirmos a equação (5.30) pela

equação (5.29) e a equação (5.28) pela equação (5.27) obtém-se, respetivamente, as igualdades

$$\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\iota}{2} = \frac{\sin \frac{\nu+\psi}{2}}{\sin \frac{\nu-\psi}{2}} \quad (5.31)$$

e

$$\frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\iota}{2}} = \frac{\cos \frac{\nu-\psi}{2}}{\cos \frac{\nu+\psi}{2}}. \quad (5.32)$$

Obtivemos assim duas equações que envolvem os valores α , ι , ν e ψ . De seguida, eliminando o parâmetro α , dividindo a equação (5.31) pela equação (5.32), obtém-se o resultado

$$\tan^2 \frac{\iota}{2} = \frac{\sin(\nu + \psi)}{\sin(\nu - \psi)}$$

que, se substituirmos ψ por $\Omega - \sigma$ e efetuarmos alguns cálculos usando o coseno da soma e diferença, o seno da soma e diferença e as identidades trigonométricas

$$\sin^2 \frac{\iota}{2} = \frac{1 - \cos \iota}{2}$$

e

$$\cos^2 \frac{\iota}{2} = \frac{1 + \cos \iota}{2},$$

é equivalente à equação

$$\tan \sigma = \frac{\tan \Omega + \tan \nu \cos \iota}{1 - \tan \Omega \tan \nu \cos \iota} \quad (5.33)$$

Como $\sigma = \lambda_0 + \lambda$, o parâmetro da efeméride orbital λ , que corresponde à longitude do ponto P , fica determinado.

De seguida, e de modo análogo, dividindo a equação (5.30) pela equação (5.27) e a equação (5.29) pela equação (5.28) obtém-se, respetivamente, as igualdades

$$\tan \frac{L}{2} \tan \frac{\alpha}{2} = \tan \left(\frac{\nu + \psi}{2} \right)$$

e

$$\frac{\tan \frac{L}{2}}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \tan \left(\frac{\nu - \psi}{2} \right).$$

Finalmente, multiplicando e dividindo as duas equações anteriores, obtém-se as equações que vão determinar os parâmetros da efeméride orbital, respetivamente, L (latitude do ponto P) e α (ângulo da direção do caminho do satélite), nomeadamente

$$\tan^2 \frac{L}{2} = \tan \left(\frac{\nu + \psi}{2} \right) \tan \left(\frac{\nu - \psi}{2} \right) \quad (5.34)$$

e

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\tan \left(\frac{\nu + \psi}{2} \right)}{\tan \left(\frac{\nu - \psi}{2} \right)}. \quad (5.35)$$

Repare-se que nestas equações já temos o valor de $\psi = \Omega - \sigma$ uma vez que σ já foi determinado a partir da equação (5.33). Com as equações (5.33), (5.34) e (5.35) conseguimos determinar uma tabulação da efeméride de um satélite que orbita próximo da Terra. Sabemos, no entanto, que estas equações não determinam valores únicos para os ângulos λ , L e α , mas as ambiguidades existentes são facilmente ultrapassadas se atendermos aos dados já conhecidos.

5.4 Exemplo do uso de quaterniões em astronomia

Durante milênios persistiu a concepção geocêntrica do Universo, em que a Terra se encontrava imóvel no centro de uma esfera em cuja superfície estavam localizados e estáticos todos os astros. A esta esfera, que rodava em torno da Terra, chamou-se Esfera Celeste (fig. 5.6). Este conceito continua a ser muito útil em Astronomia, como uma referência abstrata. Aparentemente, com a rotação da Terra sobre o seu eixo, que tem a duração de um dia, a Esfera Celeste com os seus astros, em particular o Sol, parece girar no sentido Este-Oeste, visto que a Terra gira no sentido Oeste-Este. Se marcarmos durante um ano sobre a Esfera Celeste a posição do Sol ao meio-dia, este vai descrever uma circunferência, inclinada $23^\circ 30'$ em relação ao equador da Esfera Celeste (os planos dos equadores da Esfera Celeste e da Terra coincidem). Esta órbita aparente do Sol na Esfera Celeste chama-se eclíptica. A inclinação da eclíptica é igual à inclinação que o plano da órbita da Terra faz com o seu eixo Pólo Norte-Pólo Sul. A órbita da Terra está num plano e o eixo norte-sul está inclinado $23,5^\circ$ em relação a esse plano e aponta sempre na mesma direção. O plano orbital da Terra e o plano da eclíptica são coincidentes [Dil99].

Se a Terra girasse à volta do seu eixo perpendicularmente ao plano da eclíptica, ou seja se a inclinação fosse de 0° , todos os dias e noites teriam a mesma duração de $12h$, seria um eterno equinócio (os planos do equador e da eclíptica coincidiriam) e não existiriam estações do ano [Mil03, p. 32]. Como se pode ler em [Dil99, p. 18]:

É no dia 21 de Março aproximadamente ao meio-dia, no ponto em que o



Figura 5.6: Esfera Celeste

[Imagem do site: <http://estrelasideral.blogspot.pt/2010/11/movimentos-da-terra.html>]

equador cruza o meridiano de Greenwich, que o Sol, no seu movimento aparente em torno da Terra, cruza o equador Celeste. É a partir desse instante que os relógios são acertados, que se contam os dias, as noites e as épocas do ano.

É a rotação da Terra em torno do seu eixo que origina a sucessão dos dias e das noites, enquanto que a translação da Terra em torno do Sol determina as estações do ano.

Da observação do céu podemos constatar que tanto o nascer do Sol como o pôr do Sol não ocorrem diariamente nos mesmos pontos do círculo do horizonte, que a duração do deslocamento do Sol é diferente dia após dia, assim como a altura máxima que ele atinge. Nesta secção mostramos como obter alguns resultados muito interessantes que permitem determinar esses pontos, a duração do dia e a referida altura máxima do Sol, usando operadores quaterniônicos de rotação.

Antes de avançar neste estudo podemos realçar que no Equador todas as estações são muito parecidas: todos os dias do ano o Sol fica doze horas acima do horizonte (dia) e doze horas abaixo do horizonte (noite), variando apenas a altura que o Sol atinge ao longo do ano. À medida que nos afastamos do Equador, as estações ficam mais acentuadas. Na região tropical, entre as latitudes $-23,5^\circ$ e $+23,5^\circ$, o Sol

passa pelo zénite duas vezes por ano. No Trópico de Câncer (latitude $23,5^\circ$) o Sol passa apenas uma vez pelo zénite no Solstício de Junho, e no Trópico de Capricórnio (latitude $-23,5^\circ$) o Sol passa apenas uma vez pelo zénite no Solstício de Dezembro. Fora desta região o Sol não passa pelo zénite. Nos pontos acima e abaixo dos círculos polares Ártico (latitude $66,5^\circ$) e Antártico (latitude $-66,5^\circ$), o Sol permanece 24 horas acima do horizonte no verão e 24 horas abaixo do horizonte no inverno [FS12].

Note-se que, Lisboa que tem de latitude $38,7^\circ$ em nenhuma altura do ano ao meio dia o Sol estará por cima de Lisboa, isto é, o Sol nunca terá um ângulo de elevação de 90° .

Para estudar estes assuntos vamos considerar a figura 5.7 que representa, num certo instante, o ponto S da superfície da Terra que tem o Sol na sua vertical. Note-se que este ponto pertence à região tropical.

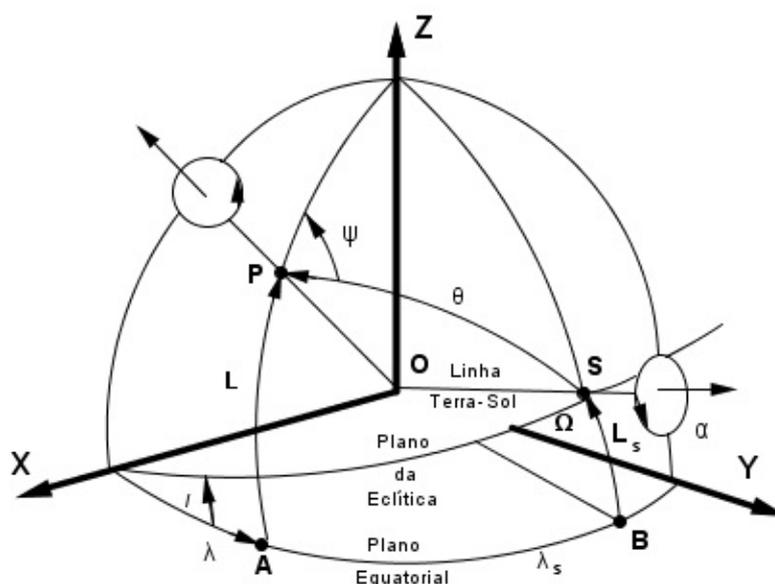


Figura 5.7: Planos da eclíptica e do equador da Terra

[Imagem realizada no programa Geogebra]

Vamos utilizar o já conhecido referencial \mathbf{XYZ} fixo e cuja origem O é o centro da Terra. O plano \mathbf{XY} é o plano equatorial da Terra. O eixo dos $\mathbf{Z}'s$ é normal a este plano e tem o sentido Norte da esfera terrestre, ou seja, é o eixo de rotação da Terra. O eixo dos $\mathbf{X}'s$ está direcionado para a *Constelação de Carneiro*. O ponto X representa a interseção da parte positiva do eixo dos $\mathbf{X}'s$ com o equador. A reta OX

representa a *linha dos Equinócios* (interseção do *Plano Equatorial da Terra* e o *Plano Orbital da Terra*). Sejam P um ponto da Terra no hemisfério Norte de latitude L , A a interseção do equador com o meridiano que passa por P e λ o ângulo formado pelo eixo dos $\mathbf{X}'s$ com OA . Os pontos A e P têm a mesma longitude. Seja \mathbf{XOS} o plano orbital da Terra que coincide com o plano da eclíptica. O ângulo ι é o ângulo da inclinação que este plano faz com o plano equatorial da Terra tendo, por isso, a amplitude de $23^\circ 30$ minutos. A latitude de S é o ângulo L_S , e λ_S representa o ângulo formado pelo eixo dos $\mathbf{X}'s$ com OB , sendo B a interseção do equador com o meridiano que passa por S . Os pontos B e S têm a mesma longitude. O ângulo Ω é o ângulo XOS e define a posição do Sol no plano da eclíptica, por isso dá-nos o dia do ano. O ângulo θ representa a distância, em radianos, do círculo máximo entre os pontos P e S e o ângulo ψ como mostra na figura é o ângulo que nos dá a direção relativamente ao Norte do nascer e pôr do Sol.

A partir deste ponto, o trabalho reside em relacionar estes ângulos através de três sequências fechadas de rotações sugeridas por Jack Kuipers [Kui02, pp. 222–233] e obter equações que vão determinar o número de horas de dia e as direções do nascente e poente, em qualquer dia do ano, para um dado ponto $P(\lambda, L)$, na Terra, definido pelo ângulo Ω . Convém referir que os ângulos que são mencionados ao longo desta apresentação são em função do tempo. Estamos a analisar um determinado instante, no entanto, a Terra roda em torno do seu eixo, assim como roda em torno do Sol numa trajetória elítica.

5.4.1 Resultados a partir da sequência fechada de rotações (1)

Vamos considerar uma composição de *sete* rotações de ângulos de Euler com uma ordem própria que vai representar a *identidade*. O eixo dos $\mathbf{x}'s$ vai conter sucessivamente os pontos X, S, P, A , por esta ordem, começando no ponto X (ponto onde o eixo positivo dos $\mathbf{x}'s$ intersesta o equador) e regressando a ele na última rotação. A concatenação destas rotações é uma sequência fechada, isto é, o referencial rodado \mathbf{xyz} após a composição de rotações irá coincidir outra vez com o referencial \mathbf{XYZ} (fixo na Terra), coincidindo com este inicialmente, mantendo-se a orientação.

Seguidamente, vamos descrever as rotações que fazem parte desta composição.

– A *primeira* rotação é em torno do eixo dos $\mathbf{x}'s$ coincidente com o eixo dos

$\mathbf{X}'s$ segundo o ângulo ι , que representamos por R_ι^x . Após esta rotação o eixo dos $\mathbf{y}'s$ que antes estava contido no plano equatorial agora está contido no plano da eclíptica passando pelo paralelo do Trópico de Câncer.

– A *segunda* rotação é em torno do novo eixo dos $\mathbf{z}'s$ segundo o ângulo Ω , indicada por R_Ω^z . Com esta rotação o novo eixo dos $\mathbf{x}'s$ vai conter o ponto S e corresponde à vertical do lugar do ponto S .

– A *terceira* rotação é em torno do novo eixo dos $\mathbf{x}'s$ segundo o ângulo α , de modo que o novo eixo dos $\mathbf{y}'s$ seja normal ao plano **POS**. Esta rotação é caracterizada por R_α^x . É de notar que após esta rotação os planos **POS** e **xz** são coincidentes.

– A *quarta* rotação é em torno do novo eixo dos $\mathbf{y}'s$ segundo o ângulo θ , representada por R_θ^y . Esta rotação fará com que o novo eixo dos $\mathbf{x}'s$ seja a vertical do lugar do ponto P .

– A *quinta* rotação é em torno do novo eixo dos $\mathbf{x}'s$ segundo o ângulo $-\psi$, representada por $R_{-\psi}^x$. Note-se que, o ângulo desta rotação é negativo, a orientação é contrária à orientação positiva do referencial. A rotação fará com que o novo eixo dos $\mathbf{z}'s$ tenha a direção Norte e o novo eixo dos $\mathbf{y}'s$ regresse ao plano equatorial.

– A *sexta* rotação é em torno do novo eixo dos $\mathbf{y}'s$ segundo o ângulo L . A representação desta rotação é dada por R_L^y . Com esta rotação o novo eixo dos $\mathbf{x}'s$ volta ao plano equatorial (passa pelo ponto A) e o novo eixo dos $\mathbf{z}'s$ já coincide com o eixo dos $\mathbf{Z}'s$.

– A *sétima* rotação, a última das rotações desta composição, fará coincidir o referencial rodado **xyz** com o referencial fixo na Terra **XYZ**. Esta rotação é em torno do eixo dos $\mathbf{z}'s$ segundo o ângulo $-\lambda$, representada por $R_{-\lambda}^z$. O ângulo desta rotação é negativo, a orientação é contrária à orientação positiva do referencial. Os eixos dos $\mathbf{x}'s$ e dos $\mathbf{y}'s$ voltam a coincidir com os eixos dos $\mathbf{X}'s$ e dos $\mathbf{Y}'s$, respetivamente, mantendo-se a mesma orientação.

Como se verifica, esta composição de rotações é fechada, isto é,

$$R_{-\lambda}^z \circ R_L^y \circ R_{-\psi}^x \circ R_\theta^y \circ R_\alpha^x \circ R_\Omega^z \circ R_\iota^x = I$$

o que é equivalente a

$$R_\Omega^z \circ R_\iota^x \circ R_{-\lambda}^z \circ R_L^y \circ R_{-\psi}^x \circ R_\theta^y \circ R_\alpha^x = I.$$

Note-se que, iniciámos a composição com a rotação R_α^x e mantivemos a ordem das rotações, podemos fazê-lo porque a sequência é fechada. Se aplicarmos o vetor \mathbf{i} a ambos os membros da igualdade anterior, poderemos eliminar a rotação de ângulo α da composição. O vetor \mathbf{i} tem a direção do eixo de rotação e é invariante para esta rotação, logo $R_\alpha^x(\mathbf{i}) = \mathbf{i}$ e podemos escrever

$$[R_\Omega^z \circ R_\iota^x \circ R_{-\lambda}^z \circ R_L^y \circ R_{-\psi}^x \circ R_\theta^y](\mathbf{i}) = \mathbf{i}$$

que equivale a

$$[R_{-\psi}^x \circ R_\theta^y](\mathbf{i}) = [R_{-L}^y \circ R_\lambda^z \circ R_{-\iota}^x \circ R_{-\Omega}^z](\mathbf{i}).$$

Podemos ainda escrever, usando operadores quaterniônicos,

$$L_{q_{y,\theta} q_{x,\psi}^*}(\mathbf{i}) = L_{q_{z,\Omega}^* q_{x,\iota}^* q_{z,\lambda} q_{y,L}^*}(\mathbf{i})$$

ou seja

$$(q_{y,\theta} q_{x,\psi}^*)^* \mathbf{i} q_{y,\theta} q_{x,\psi}^* = (q_{z,\Omega}^* q_{x,\iota}^* q_{z,\lambda} q_{y,L}^*)^* \mathbf{i} q_{z,\Omega}^* q_{x,\iota}^* q_{z,\lambda} q_{y,L}^*.$$

A partir desta equação, igualando as correspondentes componentes, obtêm-se várias relações.

Assim, de

$$(q_{y,\theta} q_{x,\psi}^*)^* \mathbf{i} q_{y,\theta} q_{x,\psi}^* = \mathbf{i} \cos \theta - \mathbf{j} \sin \psi \sin \theta + \mathbf{k} \cos \psi \sin \theta$$

e

$$\begin{aligned} & (q_{z,\Omega}^* q_{x,\iota}^* q_{z,\lambda} q_{y,L}^*)^* \mathbf{i} q_{z,\Omega}^* q_{x,\iota}^* q_{z,\lambda} q_{y,L}^* = \\ & = \mathbf{i} (\cos L \cos \lambda \cos \Omega + \cos L \cos \iota \sin \lambda \sin \Omega + \sin L \sin \iota \sin \Omega) + \\ & \quad + \mathbf{j} (\cos \iota \cos \lambda \sin \Omega - \sin \lambda \cos \Omega) + \\ & \quad + \mathbf{k} (\cos L \sin \iota \sin \Omega - \sin L \cos \lambda \cos \Omega - \sin L \cos \iota \sin \lambda \sin \Omega) \end{aligned}$$

resultam

$$\cos \theta = \cos L \cos \lambda \cos \Omega + \cos L \cos \iota \sin \lambda \sin \Omega + \sin L \sin \iota \sin \Omega, \quad (5.36)$$

$$-\sin \psi \sin \theta = \cos \iota \cos \lambda \sin \Omega - \sin \lambda \cos \Omega \quad (5.37)$$

e

$$\cos \psi \sin \theta = \cos L \sin \iota \sin \Omega - \sin L \cos \lambda \cos \Omega - \sin L \cos \iota \sin \lambda \sin \Omega \quad (5.38)$$

Vamos usar estas três equações para obter as expressões a partir das quais os parâmetros θ e ψ podem ser determinados em função dos parâmetros L , ι , Ω e λ .

A equação (5.36) determina o ângulo θ e, dividindo a equação (5.37) pela equação (5.38), obtém-se a equação

$$\tan \psi = \frac{\tan \Omega \cos \iota \cos \lambda - \sin \lambda}{\tan \Omega (-\cos L \sin \iota + \sin L \cos \iota \sin \lambda) + \sin L \cos \lambda}. \quad (5.39)$$

que determina o ângulo ψ .

A partir desta altura, vamos considerar apenas os pontos P que estão entre os círculos polares Ártico e Antártico, isto é, a latitude L de P é tal que

$$|L| \leq \frac{\pi}{2} - \iota$$

e, também vamos considerar que $\theta = \frac{\pi}{2}$, isto é, estamos a considerar que no ponto S é meio dia e no ponto P o Sol está a nascer ou a pôr-se.

Como $\cos \theta = 0$ podemos escrever a partir da equação (5.36) que

$$\tan L = -\frac{\cos \Omega \cos \lambda + \sin \Omega \cos \iota \sin \lambda}{\sin \Omega \sin \iota}. \quad (5.40)$$

A partir desta equação podemos obter dois valores para o ângulo λ que corresponde ao nascer e ao pôr do Sol para um ponto de latitude L tal que

$$|L| \leq \frac{\pi}{2} - \iota,$$

sabendo que $\iota = 23,5^\circ$ e, escolhido o ângulo Ω que define a estação do ano. De facto, a equação anterior é uma equação quadrática em $\sin \lambda$, que quando resolvida dá

$$\lambda = \arcsin \left(-B \pm \sqrt{B^2 + C} \right) \quad (5.41)$$

onde

$$B = \frac{\tan^2 \Omega \sin \iota \cos \iota \tan L}{1 + \tan^2 \Omega \cos^2 \iota}$$

e

$$C = \frac{1 - \tan^2 \Omega \sin^2 \iota \tan^2 L}{1 + \tan^2 \Omega \cos^2 \iota}.$$

Como a Terra roda, em média, 15° por hora $\left(\frac{360^\circ}{24h}\right)$, se subtrairmos os dois valores de λ (correspondentes ao nascer e pôr do Sol) e dividirmos o resultado obtido por 15° , vamos determinar o número de horas de dia do ponto P . Estes valores de λ vão ser substituídos e usados para determinar os dois ângulos de ψ na equação (5.39) e que nos vão dar as direções relativas ao Norte para o nascer e o pôr do Sol.

5.4.2 Resultados a partir da sequência fechada de rotações (2)

Vamos considerar uma outra composição de *sete* rotações de ângulos de Euler com uma ordem própria que também vai representar a *identidade*. Esta composição vai fazer passar o eixo dos $\mathbf{x}'s$ a partir do ponto X pelos pontos A, P, S, B, A , por esta ordem, regressando ao ponto X na última rotação. A concatenação destas rotações é uma sequência fechada, onde o referencial rodado \mathbf{xyz} após a composição de rotações irá coincidir de novo com o referencial \mathbf{XYZ} (fixo na Terra), coincidindo com este inicialmente, mantendo-se a orientação.

São descritas de seguida as rotações que fazem parte desta composição.

– A *primeira* rotação é em torno do eixo dos $\mathbf{z}'s$ coincidente com o eixo dos $\mathbf{Z}'s$ segundo o ângulo λ , que representamos por R_λ^z . Após esta rotação o eixo dos $\mathbf{x}'s$ vai conter o ponto A que representa a interseção da linha do equador com o meridiano que passa pelo ponto P (os pontos A e P têm a mesma longitude).

– A *segunda* rotação é em torno do novo eixo dos $\mathbf{y}'s$ segundo o ângulo $-L$, indicada por R_{-L}^y . O ângulo desta rotação é negativo, a orientação é contrária à orientação positiva do referencial. Com esta rotação o novo eixo dos $\mathbf{x}'s$ vai conter o ponto P e representa a vertical do lugar do ponto P .

– A *terceira* rotação é em torno do novo eixo dos $\mathbf{x}'s$ segundo o ângulo $-\psi$. Esta rotação é caracterizada por $R_{-\psi}^x$. Mais uma vez o sentido da rotação é negativo. Antes desta rotação, o eixo dos $\mathbf{y}'s$ estava na interseção do plano equatorial com o plano tangente à Terra no ponto P , logo, estava com a direção do vetor tangente ao paralelo do lugar do ponto P e consequentemente o eixo dos $\mathbf{z}'s$ tinha a direção do vetor de direção Norte no ponto P . Após a rotação o novo plano \mathbf{zx} vai conter a reta \mathbf{OS} e o eixo dos $\mathbf{z}'s$ aponta para o ponto S .

– A *quarta* rotação é em torno do novo eixo dos $\mathbf{y}'s$ segundo o ângulo $-\theta$, representada por $R_{-\theta}^y$. De novo este ângulo tem que ser negativo. Esta rotação fará com que o novo eixo dos $\mathbf{x}'s$ contenha a reta \mathbf{OS} e seja a vertical do lugar do ponto S .

– A *quinta* rotação será em torno do novo eixo dos $\mathbf{x}'s$ segundo o ângulo α , tal que o novo eixo dos $\mathbf{z}'s$ tenha a mesma direção do vetor que tem a direção Norte a partir do ponto S . Esta rotação também faz com que o eixo dos $\mathbf{y}'s$ regresse ao plano equatorial. Esta rotação é representada por R_α^x .

– A *sexta* rotação é em torno do novo eixo dos $\mathbf{y}'s$ segundo o ângulo L_S . A representação desta rotação é dada por $R_{L_S}^y$ e L_S representa a latitude do ponto S . Com esta rotação o novo eixo dos $\mathbf{x}'s$ volta ao plano equatorial (passa pelo ponto B) e o novo eixo dos $\mathbf{z}'s$ já coincide com o eixo dos $\mathbf{Z}'s$.

– A *sétima* rotação, a última das rotações desta composição, fará coincidir o referencial rodado \mathbf{xyz} com o referencial fixo na Terra \mathbf{XYZ} . Esta rotação será em torno do eixo dos $\mathbf{z}'s$ segundo o ângulo $-\lambda_S$, representada por $R_{-\lambda_S}^z$. O ângulo desta rotação é negativo, a orientação é contrária à orientação positiva do referencial. Os eixos dos $\mathbf{x}'s$ e dos $\mathbf{y}'s$ voltam a coincidir com os eixos dos $\mathbf{X}'s$ e dos $\mathbf{Y}'s$, respetivamente, mantendo-se a mesma orientação.

Como se verifica esta composição de rotações é fechada correspondendo à identidade, isto é,

$$R_{-\lambda_S}^z \circ R_{L_S}^y \circ R_\alpha^x \circ R_{-\theta}^y \circ R_{-\psi}^x \circ R_{-L}^y \circ R_\lambda^z = I$$

que é equivalente a

$$R_{-\theta}^y \circ R_{-\psi}^x \circ R_{-L}^y \circ R_{-\sigma}^z \circ R_{L_S}^y \circ R_\alpha^x = I.$$

Iniciámos a composição com a rotação R_α^x mantendo a ordem das rotações e substituímos $\lambda - \lambda_S$ por $-\sigma$.

Podemos eliminar, mais uma vez, a rotação de ângulo α da composição se aplicarmos o vetor \mathbf{i} a ambos os membros da igualdade anterior e escrever

$$[R_{-\theta}^y \circ R_{-\psi}^x \circ R_{-L}^y \circ R_{-\sigma}^z \circ R_{L_S}^y](\mathbf{i}) = \mathbf{i}$$

que equivale a

$$[R_{-L}^y \circ R_{-\sigma}^z \circ R_{L_S}^y](\mathbf{i}) = [R_{-\psi}^x \circ R_{-\theta}^y](\mathbf{i}).$$

Podemos ainda escrever, usando operadores quaterniônicos

$$L_{q_{y,\theta} q_{x,\psi}}(\mathbf{i}) = L_{q_{y,L_S} q_{z,\sigma}^* q_{y,L}^*}(\mathbf{i})$$

ou seja

$$(q_{y,\theta} q_{x,\psi})^* \mathbf{i} q_{y,\theta} q_{x,\psi} = (q_{y,L_S} q_{z,\sigma}^* q_{y,L}^*)^* \mathbf{i} q_{y,L_S} q_{z,\sigma}^* q_{y,L}^*.$$

A partir desta equação, vamos igualar as correspondentes componentes e obter várias relações.

Como

$$(q_{y,\theta} \ q_{x,\psi})^* \mathbf{i} \ q_{y,\theta} \ q_{x,\psi}^* = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \psi \sin \theta + \mathbf{k} \cos \psi \sin \theta$$

e

$$(q_{y,L_S} \ q_{z,\sigma}^* \ q_{y,L}^*)^* \mathbf{i} \ q_{y,L_S} \ q_{z,\sigma}^* \ q_{y,L}^* = \mathbf{i} (\cos L \cos \sigma \cos L_S + \sin L \sin L_S) + \\ + \mathbf{j} (\sin \sigma \cos L_S) + \mathbf{k} (-\sin L \cos \sigma \cos L_S + \cos L \sin L_S),$$

vamos obter as equações

$$\cos \theta = \cos L \cos \sigma \cos L_S + \sin L \sin L_S, \quad (5.42)$$

$$\sin \psi \sin \theta = \sin \sigma \cos L_S \quad (5.43)$$

e

$$\cos \psi \sin \theta = -\sin L \cos \sigma \cos L_S + \cos L \sin L_S \quad (5.44)$$

Vamos usar estas três equações para obter as expressões a partir das quais os parâmetros θ e ψ podem ser determinados em função dos parâmetros L , $\sigma = \lambda_s - \lambda$ e L_S .

A equação (5.42) determina o ângulo θ e se dividirmos a equação (5.43) pela equação (5.44) vamos obter a equação que vai determinar o ângulo ψ , a saber

$$\tan \psi = \frac{\sin \sigma}{\cos L \tan L_S - \sin L \cos \sigma}. \quad (5.45)$$

Podemos analisar, do mesmo modo, a partir desta altura, apenas os pontos P em que a sua latitude L é tal que $|L| \leq \frac{\pi}{2} - \iota$ e, também considerar que o ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$, isto é, considerar que no ponto S é meio dia num dia que o Sol está no zênite de S e no ponto P está a nascer ou a se pôr o Sol.

Como $\cos \theta = 0$ podemos escrever a partir da equação (5.42) que

$$\tan L = -\frac{\cos \sigma}{\tan L_S}. \quad (5.46)$$

A partir desta última equação, podemos obter dois valores para o ângulo λ que vão corresponder ao nascer e ao pôr do Sol para um ponto de latitude L tal que $|L| \leq \frac{\pi}{2} - \iota$, sabendo que $\iota = 23,5^\circ$ e, escolhida a latitude de S , o ângulo L_S .

A equação anterior é equivalente a

$$\lambda = \lambda_S - \arccos(-\tan L \tan L_S). \quad (5.47)$$

De igual modo, se subtrairmos os dois valores de λ (correspondentes ao nascer e pôr do Sol) e dividirmos por 15° vamos determinar o número de horas de dia do ponto P . Estes valores de λ também podem ser substituídos e usados para determinar os dois ângulos de ψ na equação (5.45) e que nos vão dar as direções relativas ao Norte para o nascer e o pôr do Sol.

Ainda, a partir da equação (5.42) se substituirmos o ângulo $\sigma = \lambda_S - \lambda$ por $\sigma - t$, introduzindo o efeito de rotação da Terra, podemos escrever

$$\cos \theta = \cos L \cos(\sigma - t) \cos L_S + \sin L \sin L_S$$

\Downarrow

$$\cos \theta = (\cos \sigma \cos t + \sin \sigma \sin t) \cos L \cos L_S + \sin L \sin L_S. \quad (5.48)$$

Para o momento que estamos a analisar, vamos considerar que $t = 0$ para o nascer do Sol. Se substituirmos t por zero e θ por $\frac{\pi}{2}$ podemos determinar $\cos \sigma$ a partir da equação (5.48), obtendo

$$\cos \sigma = -\frac{\sin L \sin L_S}{\cos L \cos L_S} \quad (5.49)$$

e também o valor de $\sin \sigma$ se usarmos a lei fundamental da trigonometria e substituirmos o $\cos \sigma$ pelo resultado obtido na equação (5.49), ou seja

$$\sin \sigma = \frac{\sqrt{\cos(L - L_S) \cos(L + L_S)}}{\cos L \cos L_S}. \quad (5.50)$$

De seguida, se substituirmos na equação (5.48) os resultados obtidos nas equações (5.49) e (5.50) dos valores de $\cos \sigma$ e $\sin \sigma$, podemos escrever

$$\cos \theta = \sin t \sqrt{\cos(L - L_S) \cos(L + L_S)} + (1 - \cos t) \sin L \sin L_S$$

que equivale a

$$\theta(t) = \frac{180^\circ}{\pi} \arccos \left[\sin t \sqrt{\cos(L - L_S) \cos(L + L_S)} + (1 - \cos t) \sin L \sin L_S \right] \quad (5.51)$$

e,

$$\beta(t) = 90^\circ - \theta(t) \quad (5.52)$$

corresponde ao ângulo de elevação do Sol no local P da Terra em função de t que está aqui representado em radianos sendo por isso necessário fazer depois a sua conversão para horas, isto é, basta multiplicar por

$$\frac{15 \times 180^\circ}{\pi}.$$

É de notar, que o ângulo máximo de elevação do Sol num ponto P na região dos trópicos, será ao meio dia do dia em que o Sol se encontra no zênite de P sendo, neste caso, $\theta = 0^\circ$ e o ângulo de elevação do Sol ao meio dia de $\beta = 90^\circ$.

5.4.3 Resultados a partir da sequência fechada de rotações (3)

Esta composição terá apenas *cinco* rotações de ângulos de Euler com uma ordem própria que também vai representar a *identidade*. O eixo dos $\mathbf{x}'s$ vai passar pelos pontos X, S, B, A , por esta ordem, começando no ponto X e regressando a ele na última rotação. A concatenação destas rotações é uma sequência fechada, onde o referencial rodado \mathbf{xyz} após a composição de rotações irá coincidir de novo com o referencial \mathbf{XYZ} (fixo na Terra), coincidindo inicialmente com este, mantendo-se a orientação.

De seguida, descrevem-se as rotações que fazem parte desta composição.

– A *primeira* rotação é em torno do eixo dos $\mathbf{x}'s$ coincidente com o eixo dos $\mathbf{X}'s$ segundo o ângulo ι , que representamos por R_ι^x . Após esta rotação o eixo dos $\mathbf{y}'s$ que antes estava contido no plano equatorial, agora está contido no plano da eclíptica passando pelo paralelo do Trópico de Câncer e conseqüentemente o novo plano \mathbf{xy} é o plano da eclíptica.

– A *segunda* rotação é em torno do novo eixo dos $\mathbf{z}'s$ segundo o ângulo Ω , indicada por R_Ω^z . Com esta rotação o novo eixo dos $\mathbf{x}'s$ vai conter o ponto S e corresponde à vertical do lugar do ponto S .

– A *terceira* rotação é em torno do novo eixo dos $\mathbf{x}'s$ segundo o ângulo α de modo que o novo eixo dos $\mathbf{y}'s$ regresse ao plano equatorial. Esta rotação é caracterizada por R_α^x .

– A *quarta* rotação é em torno do novo eixo dos $\mathbf{y}'s$ segundo o ângulo L_s , representada por $R_{L_s}^y$. Com esta rotação o novo eixo dos $\mathbf{x}'s$ volta ao plano equatorial

(passa pelo ponto B) e o novo eixo dos $\mathbf{z}'s$ já coincide com o eixo dos $\mathbf{Z}'s$. Os pontos S e B têm a mesma longitude.

– A *quinta* rotação, a última das rotações desta composição, fará coincidir o referencial rodado \mathbf{xyz} com o referencial fixo na Terra \mathbf{XYZ} . Esta rotação é em torno do eixo dos $\mathbf{z}'s$ segundo o ângulo $-\lambda_s$, representada por $R_{-\lambda_s}^z$. O ângulo desta rotação é negativo, é oposto à orientação usual do referencial. Após a rotação, os eixos dos $\mathbf{x}'s$ e dos $\mathbf{y}'s$ voltam a coincidir com os eixos dos $\mathbf{X}'s$ e dos $\mathbf{Y}'s$, respetivamente, mantendo-se a mesma orientação.

Como se verifica esta composição de rotações é fechada correspondendo à identidade, isto é,

$$R_{-\lambda_s}^z \circ R_{L_s}^y \circ R_\alpha^x \circ R_\Omega^z \circ R_t^x = I$$

que é equivalente a

$$R_\Omega^z \circ R_t^x \circ R_{-\lambda_s}^z \circ R_{L_s}^y \circ R_\alpha^x = I.$$

Iniciámos a composição com a rotação R_α^x mantendo a ordem das rotações.

Podemos eliminar, da mesma maneira, a rotação de ângulo α da composição se aplicarmos o vetor \mathbf{i} a ambos os membros da igualdade anterior e escrever

$$[R_\Omega^z \circ R_t^x \circ R_{-\lambda_s}^z \circ R_{L_s}^y](\mathbf{i}) = \mathbf{i}$$

que equivale a

$$[R_{-\lambda_s}^z \circ R_{L_s}^y](\mathbf{i}) = [R_t^x \circ R_\Omega^z](\mathbf{i}).$$

Podemos ainda escrever, usando operadores quaterniônicos

$$L_{q_{y,L_s} q_{z,\lambda_s}^*}(\mathbf{i}) = L_{q_{z,\Omega}^* q_{x,t}^*}(\mathbf{i}),$$

ou seja,

$$(q_{y,L_s} q_{z,\lambda_s}^*)^* \mathbf{i} q_{y,L_s} q_{z,\lambda_s}^* = (q_{z,\Omega}^* q_{x,t}^*)^* \mathbf{i} q_{z,\Omega}^* q_{x,t}^*.$$

A partir desta equação vamos igualar as correspondentes componentes e obter várias relações.

Como

$$(q_{y,L_s} q_{z,\lambda_s}^*)^* \mathbf{i} q_{y,L_s} q_{z,\lambda_s}^* = \mathbf{i} \cos \lambda_s \cos L_s + \mathbf{j} \sin \lambda_s \cos L_s + \mathbf{k} \sin L_s$$

e

$$(q_{z,\Omega}^* q_{x,\iota}^*)^* \mathbf{i} q_{z,\Omega}^* q_{x,\iota}^* = \mathbf{i} \cos \Omega + \mathbf{j} \cos \iota \sin \Omega + \mathbf{k} \sin \iota \sin \Omega$$

vamos obter as equações

$$\cos \Omega = \cos \lambda_s \cos L_s, \quad (5.53)$$

$$\sin \lambda_s \cos L_s = \cos \iota \sin \Omega \quad (5.54)$$

e

$$\sin L_s = \sin \iota \sin \Omega. \quad (5.55)$$

A equação (5.53) determina o ângulo Ω , dados os ângulos λ_s e L_s e, a partir dos ângulos ι e Ω a equação (5.55) determina o ângulo L_s .

Podemos, ainda, dividir a equação (5.54) pela equação (5.53) e obter

$$\tan \lambda_s = \cos \iota \tan \Omega \quad (5.56)$$

e como

$$\tan L_s = \frac{\sin L_s \sin \lambda_s}{\cos L_s \sin \lambda_s} = \frac{\sin \iota \sin \Omega \sin \lambda_s}{\cos \iota \sin \Omega} = \tan \iota \sin \lambda_s$$

obtemos ainda a seguinte equação

$$\tan L_s = \tan \iota \sin \lambda_s. \quad (5.57)$$

A partir da equação (5.56) podemos ainda escrever, considerando que $\mu = \Omega - \lambda_s$

$$\tan \mu = \frac{\tan \Omega - \tan \lambda_s}{1 + \tan \Omega \tan \lambda_s} = \frac{(1 - \cos \iota) \tan \Omega}{1 + \cos \iota \tan^2 \Omega}. \quad (5.58)$$

Se desenharmos o gráfico paramétrico dos pontos (μ, L_s) , onde

$$\mu = \arctan \left[\frac{(1 - \cos \iota) \tan \Omega}{1 + \cos \iota \tan^2 \Omega} \right]$$

e

$$L_s = \arcsin(\sin \iota \sin \Omega)$$

(as equações apresentam-se na figura 5.8), considerando inicialmente $\Omega = 0$ e a tender para 2π , vamos obter uma figura que se parece com o número oito que se denomina de *analemma* como se mostra na figura 5.9 que foi desenhada no programa Wolfram Mathematica 6.0.

$$\mu[\Omega] := \frac{1}{\text{Degree}} * \text{ArcTan}[\frac{(1 - \text{Cos}[23.5 \text{ Degree}]) * \text{Tan}[\Omega \text{ Degree}]}{(1 + \text{Cos}[23.5 \text{ Degree}]) * \text{Tan}[\Omega \text{ Degree}]}]$$

$$L_S[\Omega] := \frac{1}{\text{Degree}} * \text{ArcSin}[\text{Sin}[23.5 \text{ Degree}] * \text{Sin}[\Omega \text{ Degree}]]$$

Figura 5.8: Equações

```
ParametricPlot[{\mu[\Omega], L_S[\Omega]}, {\Omega, 0, 360}, AspectRatio -> 2,
  AxesLabel -> {"\mu (graus)", "L_S (graus)"}]
```

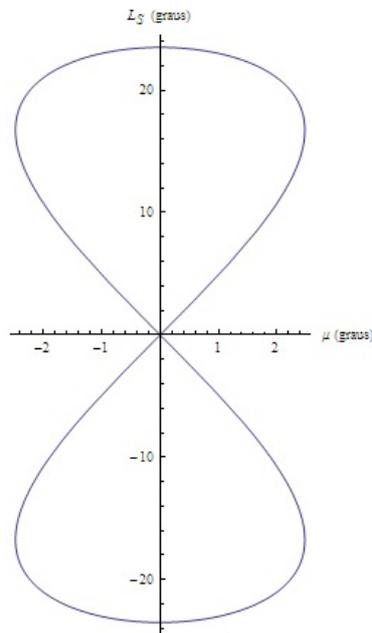


Figura 5.9: Gráfico Analemma

Esta figura representa o lugar dos pontos, desenhados no céu, em que o Sol se encontra ao meio dia no seu zénite, ao longo de um ano, num local na superfície terrestre representado, neste caso, pelo ponto S .

Note-se que $\mu = 0$ quando $\Omega = \lambda_S$. Esta situação acontece nos dias dos equinócios de Março e Setembro quando $\Omega = \lambda_S = 0^\circ$ e $\Omega = \lambda_S = 180^\circ$, respetivamente, sendo $L_S = 0^\circ$. E, nos dias dos solstícios de Junho e Dezembro quando $\Omega = \lambda_S = 90^\circ$ sendo $L_S = 23,5^\circ$ e $\Omega = \lambda_S = -90^\circ$ sendo $L_S = -23,5^\circ$, respetivamente.

Também podemos verificar que o movimento do Sol ao meio dia do local S está representado no primeiro quadrante, do equinócio de Março para o solstício de

Junho; no segundo quadrante, do solstício de Junho para o equinócio de Setembro; no quarto quadrante, do equinócio de Setembro para o solstício de Dezembro; no terceiro quadrante, do solstício de Dezembro para o equinócio de Março formando a figura que se assemelha ao número oito. Estes cálculos estão apresentados de seguida nas figuras 5.10.

$\mu[0]$	$\mu[180]$
0	0
$L_s[0]$	$L_s[180]$
0	0
$\mu[45]$	$\mu[225]$
2.47731	2.47731
$L_s[45]$	$L_s[225]$
16.3771	-16.3771
$\mu[135]$	$\mu[315]$
-2.47731	-2.47731
$L_s[135]$	$L_s[315]$
16.3771	-16.3771

Figura 5.10: Cálculos

Esta figura só será simétrica a partir de um local entre os trópicos e nos outros locais formará um número oito assimétrico.

A forma do analema depende da hora. Cerca do meio-dia local, a forma de oito é quase vertical em relação ao meridiano [Ayi09].

5.4.4 Análise de um caso particular do local: Lisboa

Nesta secção, vamos usar as equações obtidas nas sequências anteriores e a ajuda preciosa do **programa Wolfram Mathematica 6.0.** para analisar o caso particular de Lisboa que sabemos tem de latitude $38,7^\circ$ e de longitude $-9,1(6)^\circ$ e tirar alguns resultados interessantes.

Reaçalmos que, este trabalho foi feito a partir das condições iniciais deste estudo, isto é, baseando-nos na figura inicial e no referencial fixo na Terra apresentado nessa figura.

Vamos ver, em primeiro lugar, para um local da Terra de latitude de $38,7^\circ$ a

variação do ângulo de elevação do sol nos dias dos equinócios e solistícios. Poderemos também deduzir a duração do dia e da noite nesses dias.

Equinócios de março e de setembro

Sabemos que o Sol está no zénite do equador duas vezes por ano, nos Equinócios de março e de setembro. Esta situação será analisada efetuando alguns cálculos e representando o gráfico do ângulo de elevação do Sol ao longo destes dias. Para isso, vamos usar a equação (5.52), que apresentamos na figura 5.11, para desenhar o gráfico da variação do ângulo de elevação do Sol ao longo destes dias (figura 5.12).

$$\beta_{\text{eq}}[t_] := \frac{1}{\text{Degree}} * \left(90 \text{ Degree} - \text{ArcCos} \left[\text{Sin} [t * 15 \text{ Degree}] * \sqrt{\text{Cos} [38.7 \text{ Degree}] * \text{Cos} [38.7 \text{ Degree}]} \right] \right)$$

Figura 5.11: Equação $\beta(t)$ para $L = 38.7^\circ$ e $L_s = 0^\circ$

```
Plot[ $\beta_{\text{eq}}[t]$ , {t, 0, 24}, AxesLabel -> {"t horas",
" $\beta(t)$  Equinócio de Março/Setembro-Lisboa (em graus)"}]
```

$\beta(t)$ Equinócio de Março/Setembro-Lisboa (em graus)

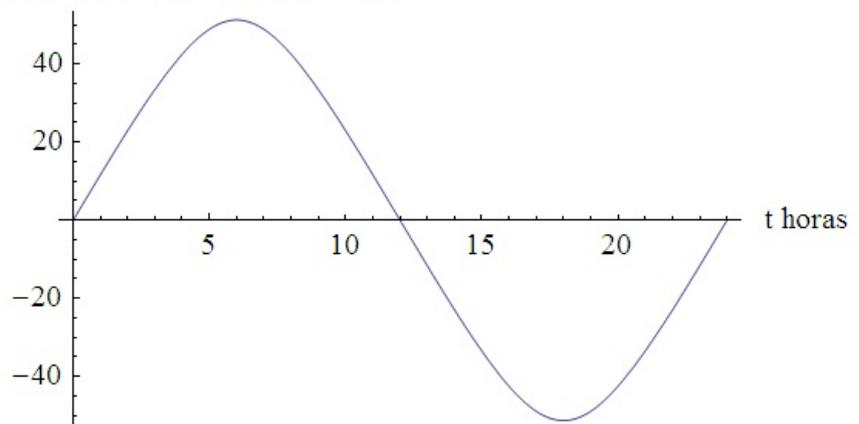


Figura 5.12: Variação do ângulo de elevação do Sol ao longo de um dia de equinócio

Como se confirma, nestes dias Lisboa tem doze horas de dia e doze horas de noite. Podemos, também, verificar que o ângulo de elevação do Sol ao meio dia é de $51,3^\circ$. Resultados obtidos nos cálculos apresentados na figura 5.13.

```

FindRoot[ $\beta_{eq}[t]$ , {t, 12}]
{t → 12.}

FindMaximum[ $\beta_{eq}[t]$ , {t, 4}]
{51.3, {t → 6.}}

FindMinimum[ $\beta_{eq}[t]$ , {t, 17}]
{-51.3, {t → 18.}}

```

Figura 5.13: Raíz próxima de 12/Máximo/Mínimo de $\beta(t)$

Solistício de junho

No Solistício de junho o Sol está no zénite do paralelo do Trópico de Câncer. Vamos analisar, da mesma maneira, esta situação. Vamos usar a equação (5.52) apresentada na figura 5.14 para desenhar o gráfico da variação do ângulo de elevação do Sol ao longo deste dia (figura 5.15).

$$\beta_{SJ}[t_] := \frac{1}{\text{Degree}} * \left(90 \text{ Degree} - \text{ArcCos} \left[\text{Sin}[t * 15 \text{ Degree}] * \sqrt{\text{Cos}[38.7 \text{ Degree} - 23.5 \text{ Degree}] * \text{Cos}[38.7 \text{ Degree} + 23.5 \text{ Degree}] + (1 - \text{Cos}[t * 15 \text{ Degree}]) * \text{Sin}[38.7 \text{ Degree}] * \text{Sin}[23.5 \text{ Degree}]} \right] \right)$$

Figura 5.14: Equação $\beta(t)$ para $L = 38.7^\circ$ e $L_s = 90^\circ$

Em Lisboa o dia tem aproximadamente $14,7182 \text{ horas} \simeq 14\text{h}43\text{min}$ e a noite tem aproximadamente $9,2818 \text{ horas} \simeq 9\text{h}17\text{min}$, é o maior dia do ano. O ângulo de elevação ao meio dia é de $74,8^\circ$, o Sol atinge a sua altura máxima neste dia. Note-se que esta é a maior inclinação que o Sol atinge na latitude de Lisboa, uma vez que esta cidade está fora da região tropical e por isso o Sol nunca estará no seu zénite e nunca atingirá os 90° . Estes cálculos estão apresentados na figura 5.16.

Solistício de dezembro

Vamos analisar, de modo análogo, o dia em que o Sol está no zénite do paralelo do Trópico de Capricórnio, o dia do Solistício de dezembro. Vamos usar, mais uma

```
Plot[ $\beta_{SJ}[t]$ , {t, 0, 24}, AxesLabel -> {"t horas",
" $\beta(t)$  Solistício de Junho-Lisboa (em graus)"}]
```

$\beta(t)$ Solistício de Junho-Lisboa (em graus)

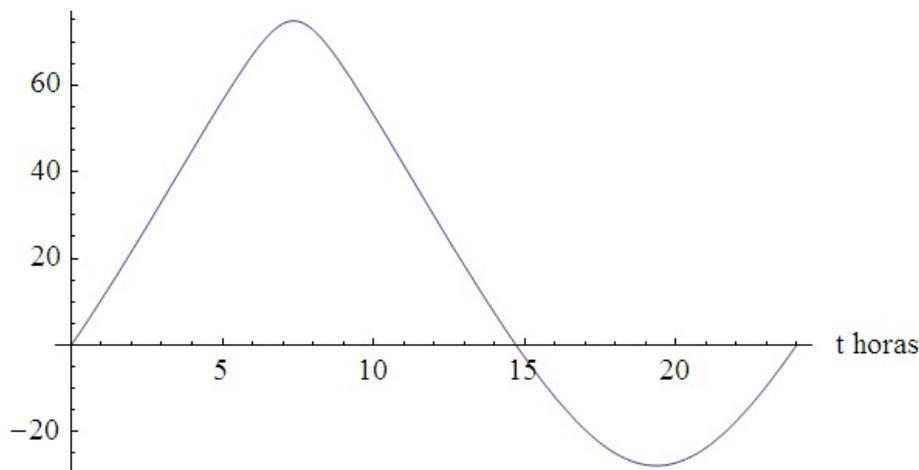


Figura 5.15: Variação do ângulo de elevação do Sol no dia de Solistício de Junho

```
FindRoot[ $\beta_{SJ}[t]$ , {t, 15}]
{t -> 14.7182}

FindMaximum[ $\beta_{SJ}[t]$ , {t, 8}]
{74.8, {t -> 7.3591}}

FindMinimum[ $\beta_{SJ}[t]$ , {t, 19}]
{-27.8, {t -> 19.3591}}
```

Figura 5.16: Raíz próxima de 15/Máximo/Mínimo de $\beta(t)$

vez, a equação (5.52) apresentada na figura 5.17 para desenhar o gráfico da variação do ângulo de elevação do Sol ao longo deste dia (figura 5.18).

$$\beta_{SD}[t_] := \frac{1}{\text{Degree}} * \left(90 \text{ Degree} - \text{ArcCos} \left[\text{Sin}[t * 15 \text{ Degree}] * \sqrt{\text{Cos}[38.7 \text{ Degree} - 23.5 \text{ Degree}] * \text{Cos}[38.7 \text{ Degree} + 23.5 \text{ Degree}] + (1 - \text{Cos}[t * 15 \text{ Degree}]) * \text{Sin}[38.7 \text{ Degree}] * \text{Sin}[-23.5 \text{ Degree}]} \right] \right)$$

Figura 5.17: Equação $\beta(t)$ para $L = 38.7^\circ$ e $L_s = 270^\circ$

Este dia, tem aproximadamente $9,2818 \text{ horas} \simeq 9\text{h}17\text{min}$ de dia e aproximada-

```
Plot[ $\beta_{SD}[t]$ , {t, 0, 24}, AxesLabel -> {"t horas",
" $\beta(t)$  Solistício de Dezembro-Lisboa (em graus)"}]
```

$\beta(t)$ Solistício de Dezembro-Lisboa (em graus)

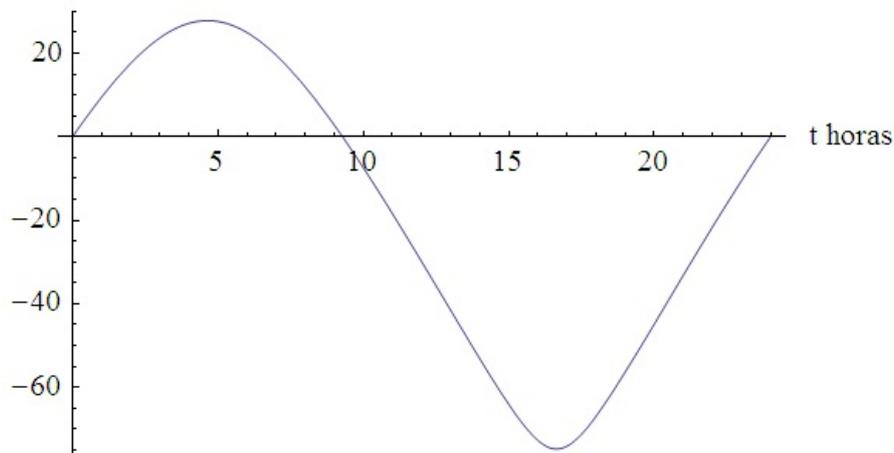


Figura 5.18: Variação do ângulo de elevação do Sol no dia de Solistício de Dezembro

mente $14,7182\text{horas} \simeq 14\text{h}43\text{min}$ de noite, sendo o dia mais curto do ano, é o oposto do primeiro dia de Verão. O ângulo de elevação ao meio dia é de apenas $27,8^\circ$, o Sol atinge a sua altura mínima neste dia. Estes cálculos estão apresentados na figura 5.19.

```
FindRoot[ $\beta_{SD}[t]$ , {t, 8}]
{t -> 9.28181}

FindMaximum[ $\beta_{SD}[t]$ , {t, 4}]
{27.8, {t -> 4.6409}}

FindMinimum[ $\beta_{SD}[t]$ , {t, 17}]
{-74.8, {t -> 16.6409}}
```

Figura 5.19: Raiz próxima de 8/Máximo/Mínimo de $\beta(t)$

O gráfico da figura 5.20 mostra a variação do ângulo do Sol em Lisboa ao longo dos dias dos equinócios (cor encarnado) e dos solistícios de junho (cor azul) e dezembro (cor verde).

De seguida, a partir das equações (5.47) e (5.57), vamos determinar as **longitudes do nascer e pôr do sol e a sua variação ao longo do ano** apresentando os correspondentes gráficos para o **local de latitude $38,7^\circ$ quando no ponto S** o

```
Plot[{Tooltip[ $\beta_{eq}[t]$ , "Equinócio de Março/Setembro"],
      Tooltip[ $\beta_{SJ}[t]$ , "Solistício de Junho"],
      Tooltip[ $\beta_{SD}[t]$ , "Solistício de Dezembro"}], {t, 0, 24},
  AxesLabel -> {"t horas", " $\beta(t)$  Lisboa (em graus)"},
  PlotStyle -> {Red, Blue, Green}]
```

$\beta(t)$ Lisboa (em graus)

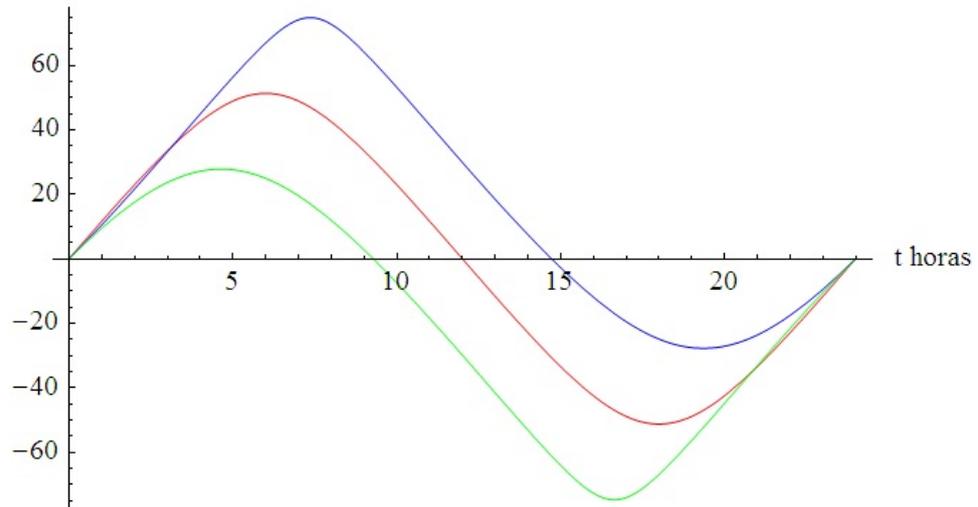


Figura 5.20: Variação do ângulo de elevação do Sol (Equinócios/Solistícios)

Sol está no seu zénite (meio dia).

As equações apresentam-se nas figuras 5.21 e 5.24. Os gráficos correspondentes estão desenhados nas figuras 5.22 e 5.25. A partir dos gráficos tiramos alguns dados, a saber

- **Equinócio de março** – o Sol nasce na longitude - 90° e põe-se na longitude 90° .
- **Solistício de junho** – o Sol nasce aproximadamente na longitude - $20,3865^\circ$ e põe-se na longitude $200,386^\circ$.
- **Equinócio de setembro** – o Sol nasce na longitude 90° e põe-se na longitude 270° .
- **Solistício de dezembro** – o Sol nasce aproximadamente na longitude $200,386^\circ$ e põe-se na longitude $339,614^\circ$.

$$\lambda_n[x_] := \frac{1}{\text{Degree}} * (x \text{ Degree} - \text{ArcCos}[-\text{Tan}[38.7 \text{ Degree}] * \text{Tan}[23.5 \text{ Degree}] * \text{Sin}[x \text{ Degree}]])$$

Figura 5.21: Equação - Longitude do nascer do sol/latitude de 38,7°

```
Plot[λn[x], {x, 0, 360}, AxesLabel → {"λS (graus)", "λn (graus)"}]
```

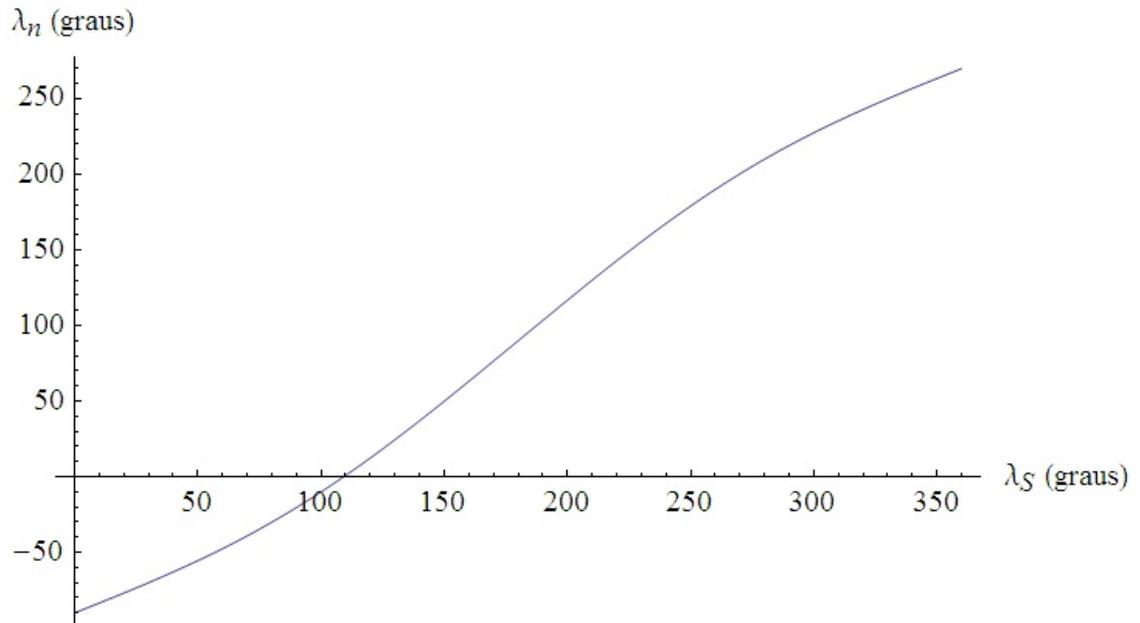


Figura 5.22: Variação ao longo do ano da longitude do nascer do sol/latitude de 38,7°

```
λn[90]
-20.3865

λn[270]
200.386
```

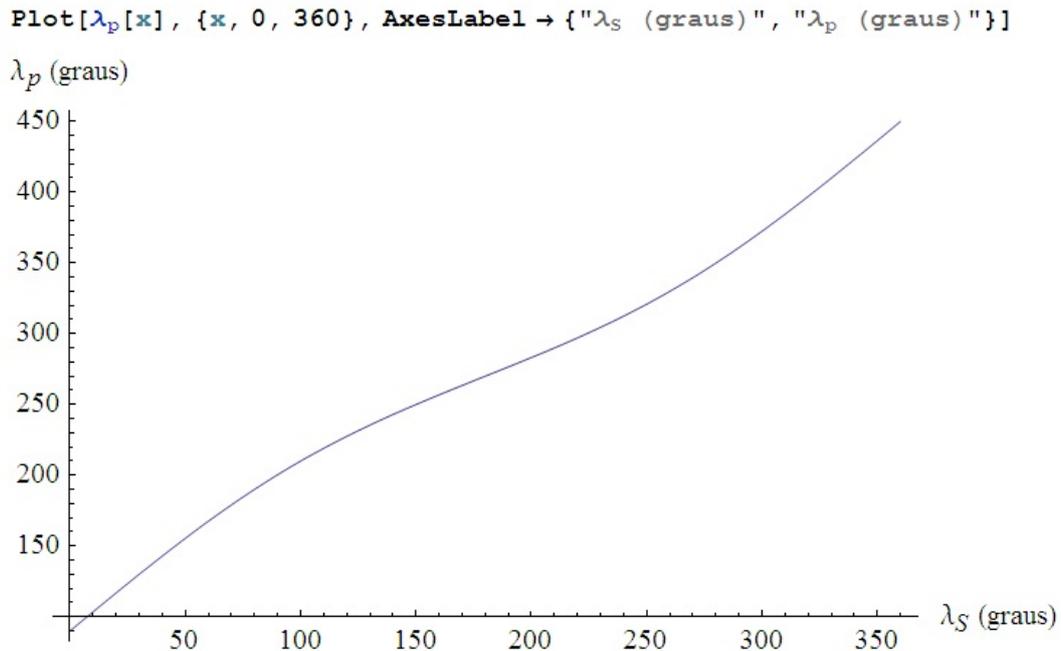
Figura 5.23: Longitude do nascer do Sol/latitude de 38,7° ($\lambda_S = 90^\circ/\lambda_S = 270^\circ$)

Alguns destes resultados surgem nas figuras 5.23 e 5.26.

Como Lisboa tem de longitude - 9.1(6)° podemos realizar alguns cálculos que se apresentam na fig. 5.27 e chegar a algumas conclusões interessantes.

Temos, então, que quando o Sol está no zénite do paralelo de Trópico de Câncer

$$\lambda_p[x_] := \frac{1}{\text{Degree}} * (x \text{ Degree} + \text{ArcCos}[-\text{Tan}[38.7 \text{ Degree}] * \text{Tan}[23.5 \text{ Degree}] * \text{Sin}[x \text{ Degree}]])$$

Figura 5.24: Equação - Longitude do pôr do sol/latitude de $38,7^\circ$ Figura 5.25: Variação ao longo do ano da longitude do pôr do sol/latitude de $38,7^\circ$

$$\begin{aligned} \lambda_p[90] & \\ 200.386 & \\ \lambda_p[270] & \\ 339.614 & \end{aligned}$$

Figura 5.26: Longitude do pôr do Sol/latitude de $38,7^\circ$ ($\lambda_S = 90^\circ / \lambda_S = 270^\circ$)

com longitude 90° (Solstício de junho – $L_s = 23,5^\circ$ e $\lambda_S = 90^\circ$), em Lisboa já temos aproximadamente $0,747983 \text{ horas} \simeq 45 \text{ min}$ de dia.

Quando o Sol está no zénite do paralelo de Trópico de Capricórnio com longitude 270° (Solstício de dezembro – $L_s = -23,5^\circ$ e $\lambda_S = 270^\circ$), em Lisboa ainda faltam aproximadamente $13,97402 \text{ horas} \simeq 13 \text{ horas e } 58 \text{ min}$ para nascer o dia.

	$\lambda_n[270]$
	200.386
	$\lambda_n[270] + 9.1667$
$-9.1667 - \lambda_n[90]$	209.553
11.2198	
$(-9.1667 - \lambda_n[90]) / 15$	$(\lambda_n[270] + 9.1667) / 15$
0.747983	13.9702
$(-9.1667 - \lambda_n[90]) / 15 * 60$	$0.9702 * 60$
44.879	58.212

Figura 5.27: N° de horas após ou até ao nascer do Sol – Lisboa (Solistícios)

Vamos utilizar os dois gráficos (figuras 5.22 e 5.25) para determinar a **variação do número de horas de dia ao longo de um ano num ponto P qualquer sobre a superfície terrestre na latitude $38,7^\circ$** , como é o caso da cidade de Lisboa. Para elaborar esse gráfico basta fazer a diferença entre o pôr e o nascer do Sol e dividir o resultado obtido por 15, para se obter o gráfico em horas, como está indicado na figura 5.28.

```

 $\lambda[x_] := (\lambda_p[x] - \lambda_n[x]) / 15$ 
Plot[ $\lambda[x]$ , { $x$ , 0, 360}, AxesLabel → {" $\lambda_S$  (graus)",
  "n° de horas de dia num ano em Lisboa"}]

```

n° de horas de dia num ano em Lisboa

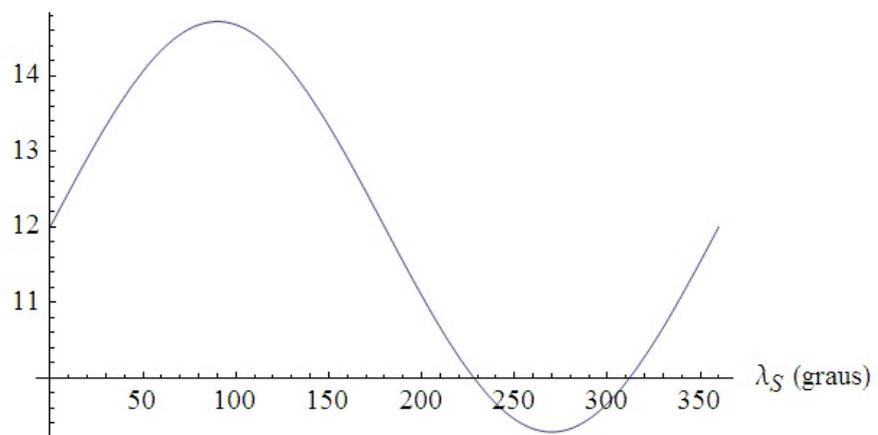


Figura 5.28: Variação ao longo do ano do número de horas de dia/latitude de $38,7^\circ$

Confirmam-se, mais uma vez, os valores que já foram obtidos anteriormente, a saber, na latitude de $38,7^\circ$ a duração do dia nos equinócios é de 12 horas e aproximadamente $14,7182 \text{ horas}$ e $9,28181 \text{ horas}$ nos solistícios de junho e dezembro, respetivamente (figura 5.29).

```

FindMaximum[ $\lambda[x]$ , {x, 80}]
{14.7182, {x  $\rightarrow$  90.}}

FindMinimum[ $\lambda[x]$ , {x, 260}]
{9.28181, {x  $\rightarrow$  270.}}

FindRoot[ $\lambda[x] == 12$ , {x, 0}]
{x  $\rightarrow$  0.}

FindRoot[ $\lambda[x] == 12$ , {x, 180}]
{x  $\rightarrow$  180.}

```

Figura 5.29: Número de horas de dia nos equinócios e solistícios

Podemos, ainda, determinar a partir da equação (5.45) as **direções para o norte do nascer do Sol, em Lisboa, nos dias dos solistícios** (figura 5.30).

$$\psi_{nj} = \frac{1}{\text{Degree}} * \text{ArcTan} \left[\frac{\text{Sin}[90 \text{ Degree} - \lambda_n[90] \text{ Degree}]}{\text{Cos}[38.7 \text{ Degree}] * \text{Tan}[23.5 \text{ Degree}] - \text{Sin}[38.7 \text{ Degree}] * \text{Cos}[90 \text{ Degree} - \lambda_n[90] \text{ Degree}]} \right]$$

59.2739

$$\psi_{nd} = \frac{1}{\text{Degree}} * \text{ArcTan} \left[\frac{\text{Sin}[270 \text{ Degree} - \lambda_n[270] \text{ Degree}]}{\text{Cos}[38.7 \text{ Degree}] * \text{Tan}[-23.5 \text{ Degree}] - \text{Sin}[38.7 \text{ Degree}] * \text{Cos}[270 \text{ Degree} - \lambda_n[270] \text{ Degree}]} \right]$$

-59.2739

Figura 5.30: Direção para o norte do nascer do Sol – Lisboa (Solistícios)

Verifica-se que a direção para o norte do nascer do Sol são aproximadamente $59,2739^\circ$ e $-59,2739^\circ$ nos dias dos solistícios de junho e dezembro, respetivamente. Note-se que, é fácil de entender que o ângulo correspondente ao solistício de junho seja positivo e que o ângulo que corresponde ao solistício de dezembro seja negativo.

A título de curiosidade, vamos determinar **dois pontos S da superfície terrestre tais que quando num deles é meio dia (isto é, o Sol está nesse instante no seu zénite), em Lisboa está a nascer ou pôr-se o Sol, respectivamente.** Para isso, utilizámos uma equação equivalente à equação (5.40), a saber

$$\tan \Omega = \frac{-\cos \lambda}{\tan L \sin \iota + \cos \iota \sin \lambda} \quad (5.59)$$

e as equações (5.53) e (5.54).

Começamos por apresentar a latitude e longitude de S para o instante em que é meio dia em S e o Sol está a pôr-se em Lisboa (figura 5.31).

```

tan $\Omega$  =  $\frac{-\text{Cos}[-9.17 \text{ Degree}]}{\text{Tan}[38.7 \text{ Degree}] * \text{Sin}[23.5 \text{ Degree}] + \text{Cos}[23.5 \text{ Degree}] * \text{Sin}[-9.17 \text{ Degree}]}$ 
-5.69621

 $\Omega_p = \text{ArcTan}[\text{tan}\Omega] / \text{Degree}$ 
-80.0429

tan $\lambda_{Sp} = \text{tan}\Omega * \text{Cos}[23.5 \text{ Degree}]$ 
-5.22377

 $\lambda_{Sp} = \text{ArcTan}[\text{tan}\lambda_{Sp}] / \text{Degree}$ 
-79.1628

sin $L_{Sp} = \text{Sin}[23.5 \text{ Degree}] * \text{Sin}[\Omega_p \text{ Degree}]$ 
-0.392743

 $L_{Sp} = \text{ArcSin}[\text{sin}L_{Sp}] / \text{Degree}$ 
-23.1253

```

Figura 5.31: Meio dia no ponto S e o Sol poente em Lisboa

Após os cálculos anteriores temos que este ponto S tem de latitude - 23,1253° e de longitude - 79,1628°. De facto, se usarmos a equação (5.42) confirmamos que o ângulo $\theta = -90^\circ$ (figura 5.32).

Vamos agora apresentar a latitude e longitude de S para o instante em que é meio dia em S e o Sol está a nascer em Lisboa (figura 5.33).

Após os cálculos anteriores temos que este ponto S tem de latitude 23,1253° e de longitude 100,837°. Se usarmos, da mesma maneira, a equação (5.42) confirmamos que o ângulo $\theta = 90^\circ$ (figura 5.34).

```

cosθp = Cos [38.7 Degree] * Cos [λSP Degree + 9.17 Degree]
* Cos [LSP Degree] + Sin [38.7 Degree] * Sin [LSP Degree]
-2.77556 × 10-17

θp = -ArcCos [cosθp] / Degree
-90.

```

Figura 5.32: $\theta = -90^\circ$

```

Ωn = 180 + Ωp
99.9571

λSn = 180 + λSP
100.837

sinLSn = Sin [23.5 Degree] * Sin [Ωn Degree]
0.392743

LSn = ArcSin [sinLSn] / Degree
23.1253

```

Figura 5.33: Meio dia no ponto S e o Sol nascente em Lisboa

```

cosθn = Cos [38.7 Degree] * Cos [λSn Degree + 9.17 Degree]
* Cos [LSn Degree] + Sin [38.7 Degree] * Sin [LSn Degree]
1.11022 × 10-16

θn = ArcCos [cosθn] / Degree
90.

```

Figura 5.34: $\theta = 90^\circ$

5.5 Vantagens e desvantagens matrizes/ângulos de Euler/quaterniões

A teoria dos quaterniões desde que foi introduzida encontrou muitas aplicações na mecânica clássica, mecânica quântica e na teoria da relatividade [Muk02]. Um dos exemplos conhecidos é o de James Maxwell que, em 1864, usou os quaterniões no

seu trabalho sobre as ondas eletromagnéticas [Wikb12]. Mais tarde, usando a teoria de Maxwell, Marconi inventou o primeiro telégrafo em 1895 e posteriormente a rádio [Wikc12]. No entanto, após o início do século XX os quaterniões foram um pouco esquecidos.

Tradicionalmente têm sido usadas matrizes para representar rotações a três dimensões. Note-se que, além disso, podemos representar, matricialmente as transformações de escala, translações, etc... No entanto, as matrizes de rotação apresentam algumas desvantagens entre as quais: têm 9 graus de liberdade; 6 restrições de ortogonalidade (as linhas e colunas da matriz são ortogonais); risco de erros de arredondamento na concatenação de matrizes [Pin06, p. 64].

Os ângulos de Euler são, analogamente, os mais usados para representar rotações na computação gráfica, mas como sabemos podem causar alguns problemas, entre os quais, a ocorrência de *gimbal lock*; haver sequências eixo-ângulo diferentes para representar uma rotação; a representação da concatenação de várias rotações é complexa. No entanto, esta representação é muito útil porque envolve apenas 3 graus de liberdade, é eficiente, além de que a sua utilização é um processo muito intuitivo.

Atualmente os quaterniões estão a ser cada vez mais usados em várias áreas, entre as quais as apresentadas neste trabalho, mas de facto com maior incidência na área da computação gráfica (representação de cenas em 3D) e na robótica, isto é, na animação de gráficos tridimensionais e na geração de trajetórias em robótica [Lau06, p. 29]. O aumento do uso dos quaterniões ficou-se a dever a terem sido apresentados “de novo” em 1985 por Ken Shoemake, quando este expôs o seu artigo “*Animating Rotation with Quaternion Curves*” na conferência SIGGRAPH (Special Interest Group on Computer Graphics) e anunciou os quaterniões como uma boa solução na obtenção de rotações de objetos em 3D e na movimentação de câmeras de filmar, expondo as deficiências que apresentavam os métodos usuais de utilização dos ângulos de Euler [Han06, pp. 9–11].

A partir da computação gráfica o domínio da aplicação dos quaterniões expandiu-se para a animação em 3D, provocando uma grande evolução da indústria cinematográfica e nos jogos de computadores, numa tentativa de aproximação do mundo virtual à realidade. Como exemplos, refira-se que a Walt Disney Pictures, unida com os estúdios Pixar, produziu filmes de grande êxito, a saber: Toy Story (1995), A Bug’s Life (1998), Toy Story 2 (1999), Monsters Inc. (2001), Finding Nemo (2003), entre outros e,

no jogo Tomb Raider, a personagem Lara Croft é animada com quatérniões [Pin06, p. 9]. Algumas indústrias científicas têm usado a animação em 3D, nomeadamente na medicina, advocacia, arquitetura e visualização de um produto [Bea12, p. 25]. A robótica também teve um grande desenvolvimento em consequência desta evolução da computação gráfica, e tem sido implementada nas cirurgias, onde um robô é manipulado pelo cirurgião com um *joystick*. A título de curiosidade, refira-se que estes robôs podem ser manipulados à distância, tendo as primeiras aplicações da robótica cirúrgica sido desenvolvidas pela NASA com o objetivo de operar à distância um astronauta que estivesse, por exemplo, a caminho de Marte [Fil12].

Os quatérniões unitários apresentam a desvantagem de representarem apenas rotações, sendo além disso geometricamente pouco intuitivos. O seu uso pode também causar alguma indeterminação na orientação dos eixos, uma vez que q e $-q$ representam a mesma rotação. No entanto, apresentam vantagens relativamente às outras representações, a saber, têm 4 graus de liberdade; têm de respeitar apenas 1 restrição (a norma ser 1); é fácil representar o quatérnião correspondente à composta de duas rotações, bastando multiplicar os quatérniões correspondentes a cada uma delas; o problema *gimbal lock* não surge com os quatérniões; não estão condicionados pelo sistema de coordenadas, por isso, não existe uma preocupação com a ordem das rotações (como acontece nos ângulos de Euler).

Uma outra vantagem que não foi estudada neste trabalho, tem a ver com a interpolação linear esférica (SLERP). Esta interpolação e a fórmula correspondente foi apresentada por Shoemake [Sho85, p. 248] com a finalidade de obter movimentos mais suaves na animação de objectos em 3D [Han06, pp. 9–11], sendo a obtenção de movimentos mais próximos dos naturais um dos problemas que enfrenta a programação gráfica [Mil06, p. 3]. Sendo problemática a interpolação linear esférica nas outras representações, nos quatérniões ela é perfeita.

Capítulo 6

Conclusões

Na conclusão deste trabalho impõe-se, de uma forma abreviada, apresentar as principais linhas estruturantes da análise ao nosso objeto de estudo.

Este trabalho inicia-se por uma explicação sumária do porquê da escolha desta temática.

No capítulo 2, aludimos a uma nota histórica que descreve a genialidade de um matemático em busca de um sonho, na procura de uma forma de capturar algebricamente alguma da geometria do espaço tridimensional. Explica-se como Hamilton chega e difunde as suas descobertas e, ainda, quais as reações da comunidade científica a estas novas ideias e concepções.

No terceiro capítulo, fazemos uma introdução ao estudo dos quaterniões e das suas diferentes representações, dando relevo às suas principais propriedades. Faz-se, ainda, a exposição de resultados algébricos muito úteis, nomeadamente no âmbito dos quaterniões unitários. Estes conteúdos são fundamentais uma vez que sustentam os capítulos seguintes.

No capítulo 4 abordamos as rotações em \mathbb{R}^3 recorrendo a matrizes. Fazemos uma distinção entre rotações do referencial e rotações dos pontos em \mathbb{R}^3 . São descritos alguns resultados sobre matrizes de rotação considerados essenciais. Descrevemos as rotações usando quaterniões unitários, obtendo o operador quaterniônico de rotação. Introduzimos os ângulos de Euler e as sequências eixo-ângulo de Euler, que vão ser utilizadas ao longo do capítulo 5, que são fundamentais para a compreensão e

o estudo de alguns dos exemplos apresentados. Aparecem, também, as conversões entre matrizes/eixo-ângulo e matrizes/quaterniões, acrescentando-se e alargando-se aos ângulos de uma sequência eixo-ângulo de Euler.

No capítulo 5 defendemos a utilidade dos quaterniões através de diferentes aplicações, nomeadamente, à trigonometria esférica, onde se determinam algumas das fórmulas trigonométricas mais usadas, além de se apresentar uma conjectura de uma igualdade que relaciona o lado e o ângulo complementar do ângulo interno de um polígono regular na esfera unitária. Na aeronáutica pesquisamos quaternionicamente uma das sequências de eixo-ângulo de Euler mais usadas na navegação aérea. Fazemos o estudo dos ângulos de orientação *Heading*, *Elevation* e *Bank*, também chamados de “Yaw”, “Pitch” e “Roll”, respetivamente. Nesta fase, fazemos a análise matricial e quaterniônica e explicamos o efeito *gimbal lock*. Seguidamente, é dado um exemplo de engenharia aeroespacial onde se estuda e determina, num dado momento, usando os quaterniões, a efeméride de um satélite que orbita próximo da Terra. Complementarmente, evidenciamos um exemplo na astronomia onde os quaterniões permitem determinar equações que descrevem o resultado da ação conjunta dos movimentos de translação e rotação da Terra. Neste domínio, descrevemos o caso particular de Lisboa, onde se apresentam e analisam cálculos e gráficos, nomeadamente: da variação do ângulo de elevação do Sol nos equinócios e solstícios; da variação da longitude do nascer e pôr do Sol ao longo de um ano; da variação ao longo do ano do número de horas de dia; das direções, relativas ao Norte, do nascer e do pôr do Sol nos solstícios; do cálculo de dois pontos da superfície terrestre tais que quando num deles é meio dia (isto é, o Sol está nesse instante no seu zénite), em Lisboa está a nascer ou pôr-se o Sol, respectivamente. Por último, fazemos uma referência à importância que os quaterniões têm, na atualidade, na indústria de animação em 3D (cinema, jogos de computador e de televisão, na produção de software — o programa Wolfram Mathematica 6.0 contém, o “Quaternions Package”) e também na robótica, sendo esta aplicação recente importante na realização de cirurgias. Terminamos com a apresentação das vantagens e desvantagens dos quaterniões/matrizes/ângulos de Euler nas rotações em \mathbb{R}^3 .

Este trabalho aborda a temática dos quaterniões, um domínio da matemática absolutamente empolgante. Ninguém pode referir que tem solução para tudo, mas podemos afirmar que a matemática tem soluções que são essenciais para estruturar e clarificar uma sociedade em constante mutação. “É que a Matemática está implemen-

tada ao nível do software ou está por detrás da concepção do instrumento, ou ainda das ideias que levaram ao desenvolvimento das tecnologias... Não é pois visível a “olho nu”... ” [Mac11]. Escreveram, também, Douglas M. Campbell e John C. Higgins “*Os matemáticos adoram a Matemática pela sua beleza e ordem. A sociedade tolera a Matemática por ser tão útil*” [CH84, p. 255].

Num trabalho desta natureza surgem muitas dúvidas, incertezas, indecisões e interrogações que se mostram importantes no desenvolvimento de novas formas de pensar a matemática. Pode-se dizer como Júlio Pomar que “*as minhas dúvidas são o meu material mais precioso*” [Pom04, p. 30]. É um exercício que se desenvolve todos os dias, onde se encontram novos caminhos, se fazem pequenas descobertas. Por vezes apetece dizer como Sophia de Mello Breyner Andresen num extrato do poema “Deriva”: “*(...) e assim contando quanto vi, não sei se tudo errei ou descobri*” [Tav06, p. 8]. Também o matemático Bento Jesus Caraça tinha uma frase lapidar sobre a ponderação e preparação de um trabalho quando defendia que as “*(...) hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições*” [Car98, p. vii]. Espera-se que esta temática dos quaterniões possa continuar a clarificar o futuro com a ajuda de todos aqueles que se interessam e venham a justificar o seu tempo na procura de novas descobertas deste fenómeno. Perspetivando o futuro pensamos aprofundar a médio prazo este estudo, alargando-o ao domínio da animação 3D que consideramos ser um assunto fascinante e que transmite felicidade a quem o trabalha. Parafraseando Alfréd Rényi “*If I feel unhappy, I do mathematics to become happy. If I am happy, I do mathematics to keep happy*”¹ [Tur70, pp. 199–200].

Em síntese, a álgebra descoberta por Hamilton impulsionou o *modus operandi* do mundo moderno, permitindo melhorias basilares, apontando novos caminhos permanentes de evolução e, com a dedicação e trabalho de matemáticos, no futuro, teremos novas ideias e perspetivas na consecução de novas descobertas neste domínio. Esperemos poder um dia afirmar que a nossa vida gira à volta de “Os Quaterniões e as suas Aplicações”.

¹*Se me sinto infeliz, faço matemática para ficar feliz. Se estou feliz, faço matemática para continuar feliz.*

Referências

- [Alt86] ALTMANN, Simon L. 1986. *Rotations, Quaternions, and Double Groups*. New York : Oxford University Press.
- [And71] ANDREE, Josephine P. 1971. *Lines from the O. U. Mathematics Letter Vol. 1 : Number Extensions*. Oklahoma : Mu Alpha Theta.
- [Art88] ARTMANN, Benno. 1988. *The concept of number : From Quaternions to Monads and Topological Fields*. Michigan : Ellis Horwood, Ltd.
- [Ayi09] AYIOMAMITIS, Anthony. 2009. *Analemma*. Disponível na Internet em: <<http://www.astronoo.com/actualites/analema-pt.html>>
- [Bac28] Roger Bacon, *Opus Majus* [1266–1268], Part IV, distinction I, chapter I, traduzido por R. B. Burke, *The Opus Majus of Roger Bacon* (1928), Vol. I, p. 116. Disponível na Internet em: <http://todayinsci.com/B/Bacon_Roger/BaconRoger-Quotations.htm>
- [Bea12] BEANE, Andy. 2012. *3D Animation Essentials*. Indianapolis : John Wiley and Sons, Inc.
- [Bel45] BELL, E. T. 1945. *The Development of Mathematics*. Second Edition. New York ; London : McGraw-Hill Book Company.
- [Car98] CARAÇA, Bento de Jesus. 1998. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa : Gradiva – Publicações, Ltda.
- [Cas87] CASTELJAU, Paul de. 1987. *Les quaternions*. Paris ; Londres ; Lausanne : Hermès.
- [CG96] CONWAY, Jonh H., GUY, Richard K. 1996. *The Book of Numbers*. New York : Springer-Verlag.

- [CH84] CAMPBELL, Douglas M., HIGGINS, John C. 1984. *Mathematics : People, Problems, Results*. vol. I. [S.I.] : Wadsworth.
- [CS03] CONWAY, John H., SMITH, Derek A. 2003. *On Quaternions and Octonions : Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry*. Natick, Massachusetts : A K Peters, Ltd.
- [Dar07] DARLING, David. 2007. *The Encyclopedia of Astrobiology, Astronomy, and Spaceflight*. Disponível na Internet em: <http://www.daviddarling.info/encyclopedia/C/celestial_mechanics_entries.html>
- [Dil99] DILÃO, Rui. 1999. *Latitudes e Longitudes*. Ministério da Ciência e da Tecnologia, Eurodois, Lda. Disponível na Internet em: <<http://www.cienciaviva.pt/equinocio/download/lat-long.pdf>>
- [Dum11] DUMONT, Émile. 1911. *Arithmétique Générale*. Michigan : Librairie Scientifique A. Hermann et Fils.
- [Ebb91] EBBINGHAUSS, Heinz-Dieter. et al. 1991. *Numbers*. New York : Springer-Verlag.
- [Fen01] FENN, Roger. 2001. *Geometry*. London : Springer-Verlag.
- [Fil12] FILHO, Rúbens Paulo Gonçalves. 2012. *A cirurgia robótica : descrição*. Disponível na Internet em: <http://www.gestar.med.br/cirurgia_rob_descricao.html>
- [FS12] FILHO, Kepler., SARAIVA, Maria. 2012. *Movimento Anual do Sol e as Estações do Ano*. Disponível na Internet em: <<http://astro.if.ufrgs.br/tempo/mas.htm>>
- [Ham67] HAMILTON, William Rowan. 1967. *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton, Vol. 3, Algebra : On Quaternions; or on a new System of Imaginaries in Algebra*. Cambridge : Cambridge University Press. Disponível na Internet em: <<http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/OnQuat/OnQuat.pdf>> David R. Wilkins. 2000.

- [Han06] HANSON, Andrew J. 2006. *Visualizing Quaternions : Series in Interactive 3D Technology*. San Francisco : Elsevier, Inc.
- [Kor68] KORN, Granino A., KORN, Theresa M. 1968. *Mathematical, Handbook for Cientists and Engineers*. Second Edition. New York [etc.] : McGraw-Hill Book Company.
- [Kre08] KREMER, Verena Elisabeth. 2008. *Quaternions and SLERP*. University of Saarbrucken, Department for Computer Science Seminar Character Animation. Disponível na Internet em: <http://embots.dfki.de/doc/seminar_ca/Kremer_Quaternions.pdf>
- [Kui02] KUIPERS, Jack B. 2002. *Quaternions and Rotation Sequences*. Princeton, New Jersey : Princeton University Press.
- [Lau06] LAUS, Luís Paulo. 2006. *Introdução à Robótica : Descrição de objectos no espaço 3D*. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Disponível na Internet em: <<http://pessoal.utfpr.edu.br/lcar/arquivos/introduc2.pdf>>
- [Mac11] MACHIAVELO, António. 2011. *A invisibilidade na matemática*. In artigo da rubrica “Entre parênteses ()”. Disponível na Internet em: <<http://www.clube.spm.pt/arquivo/420>>
- [Mal04] MALONEK, Helmuth R. 2004. *Quaternions in applied sciences : A historical perspective of a mathematical concept*. In artigo disponível na Internet em: <<http://e-pub.uni-weimar.de/opus4/frontdoor/index/index/docId/13>>
- [Mil03] MILONE, André de Castro. 2003. *Introdução à Astronomia e Astrofísica : A Astronomia no dia-a-dia*. São José dos Campos : Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Divisão de Astrofísica. Disponível na Internet em: <<http://mtc-m18.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/jeferson/2003/08.14.14.33/doc/capitulo1.pdf>>
- [Mil06] MILLER, Jace. 2006. *An Introduction to Quaternions and their Applications to Rotations in Computer Graphics*. Disponível na Internet em: <[http://jacemiller.net/downloads/An Introduction to Quaternions and their Applications to Rotations in Computer Graphics.pdf](http://jacemiller.net/downloads/An%20Introduction%20to%20Quaternions%20and%20their%20Applications%20to%20Rotations%20in%20Computer%20Graphics.pdf)>
- [Mor99] MORTENSON, Michael E. 1999. *Mathematics for Computer Graphics Application*. Second Edition. New York : Industrial Press, Inc.

- [Muk02] MUKUNDAN, R. 2002. *Quaternions: From Classical Mechanics to Computer Graphics, and Beyond*. In Proceedings of the 7 th Asian Technology Conference in Mathematics.
- [Par12] PARENT, Rick. 2012. *Computer Animation : Algorithms and Techniques*. MA : Elsevier, Inc.
- [Pin06] PINHEIRO, Maria Lúcia Gonçalves. 2006. *Quaterniões : Cálculo numérico e simbólico*. In tese disponível na Internet em <<http://repositorium.sdum.uminho.pt>>
- [Pom04] POMAR, J. 2004. *As minhas dúvidas são o meu material mais precioso*. In Revista dos antigos alunos da Universidade do Porto, nº 12. Porto : Digipress.
- [Rêg04] RÊGO, Eduardo Francisco. 2004. *Tópicos de Geometria*. FCUP- Departamento de Matemática Pura. Disponível na Internet em: <<http://cmup.fc.up.pt/cmup/eerego/TG.pdf>>
- [Rib11] RIBEIRO, Carlos M. 2011. *Álgebra Linear e Geometria Analítica : Relações binárias e funções, Estruturas algébricas, Números complexos*. Disponível na Internet em: <<http://www.deetc.isel.ipl.pt/matematica/AL/downloads/AL-Livro/Apendices-3.8.pdf>>
- [Ros10] ROSA, Carlos Augusto de Proença. 2010. *História da Ciência : O Pensamento Científico e a Ciência do séc. XIX, Volume II, Tomo II*. Brasília : FUNAG
- [Sho85] SHOEMAKE, Ken. 1985. *Animating Rotation with Quaternion Curves*. Volume 19, Number 3. San Francisco : SIGGRAPH. The Singer Company. Link Flight Simulation Division. Disponível na Internet em: <<http://run.usc.edu/cs520-s12/assign2/p245-shoemake.pdf>>
- [Smi59] SMITH, David E. 1959. *A Source Book in Mathematics*. Mineola, N.Y. : Dover Publications, Inc.
- [Sti04] STILLWELL, John , SMITH, Derek A. 2004. *Mathematics and its History*. Second Edition. New York : Springer-Verlag.
- [Str67] STRUIK, Dirk J. 1967. *A Concise History of Mathematics*. Third Edition. New York : Dover Publications, Inc.

- [Suz02] SUZUKI, Jeff. 2002. *A History of Mathematics*. California : Prentice-Hall, Inc.
- [Swe94] SWETZ, Frank J. 1994. *Learning Activities from the History of Mathematics*. Portland, Maine : J.Weston Walsh, Publisher.
- [Tav06] TAVARES, Miguel S. 2006. *Sul - Viagens*. Sexta Edição. Cruz Quebrada : Oficina do livro.
- [Tur70] TURÁN, Pál. 1970. *Matematikai Lapok : The Work of Alfréd Rényi*. Vol. 21. Virginia : Bolyai János Matematikai Társulat.
- [Val64] VAL, Patrick Du. 1964. *Homographies Quaternions And Rotations*. London : Oxford University Press.
- [Val82] VALLADARES, Renato José da Costa. 1982. *Álgebra linear e geometria analítica*. Rio de Janeiro : Editora Campus Ltda.
- [Wika12] WIKIPEDIA. 2012. *Gimbal lock*. Disponível na Internet em: <[http://en.wikipedia.org/wiki/Gimbal lock](http://en.wikipedia.org/wiki/Gimbal_lock)>
- [Wikb12] WIKIPEDIA. 2012. *James Clerk Maxwell*. Disponível na Internet em: <[http://en.wikipedia.org/wiki/James Clerk Maxwell](http://en.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell)>
- [Wikc12] WIKIPEDIA. 2012. *Guglielmo Marconi*. Disponível na Internet em: <[http://pt.wikipedia.org/wiki/Guglielmo Marconi](http://pt.wikipedia.org/wiki/Guglielmo_Marconi)>